Systèmes linéaires : exercices

TERMINALE S1-S3 · CHAPITRE 14 · EXERCICES D'APPLICATION

Séries S1, S3 et S1A. Exercices classés par leçon, du plus simple au plus complet ; l'exercice 12 est un exercice d'approfondissement. Dans les exercices de géométrie, l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Pense à vérifier chaque solution dans le système de départ. Les corrigés détaillés sont dans la fiche « Corrigés ».

Leçon 1 : systèmes de deux équations à deux inconnues

Exercice 1 : méthode de Cramer et position de deux droites

1. Résoudre par la méthode de Cramer :
   a. $\begin{cases} 3x-2y &= 4 \\ 5x+4y &= 14 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 0{,}5x+1{,}5y &= 4 \\ 2x-y &= 2 \end{cases}$
2. Pour chacun des systèmes suivants, calculer le déterminant, résoudre le système, et donner la position relative des deux droites qu'il représente :
   c. $\begin{cases} 4x-6y &= 2 \\ -6x+9y &= -3 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x+3y &= 2 \\ -2x-6y &= 5 \end{cases}$
3. Sans le résoudre, dire si le système $\begin{cases} 7x-5y &= 1 \\ 3x+2y &= 11 \end{cases}$ a une unique solution.

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 2 : un paramètre, trois droites

1. Pour tout réel m, on considère (S_m) : $\begin{cases} mx+y &= 1 \\ x+my &= 1 \end{cases}$
   a. Calculer le déterminant de (S_m) en fonction de m.
   b. Pour quelles valeurs de m le système a-t-il une unique solution ? La calculer.
   c. Résoudre (S_1) et (S_{-1}), et interpréter géométriquement.
2. Soit k un réel. On considère le système de trois équations à deux inconnues $\begin{cases} x+y &= 3 \\ x-y &= 1 \\ 2x+y &= k \end{cases}$
   a. Résoudre le système formé par les deux premières équations.
   b. Pour quelle valeur de k le système des trois équations a-t-il une solution ? Interpréter à l'aide de trois droites.

Leçon 2 : systèmes équivalents et opérations sur les lignes

Exercice 3 : opérations sur les lignes, systèmes triangulaires

1. On considère (S) : $\begin{cases} x+y+z &= 1 \quad (L_1) \\ 2x+y-z &= 3 \quad (L_2) \\ x-y+2z &= 3 \quad (L_3) \end{cases}$

   a. Vérifier que $(2\,;-1\,;0)$ est solution de (S).

   b. Parmi les opérations suivantes, lesquelles transforment (S) en un système équivalent ? Justifier.

   (i) $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$; (ii) $L_3 \leftarrow 0 \times L_3$; (iii) $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ en même temps ; (iv) $L_1 \leftrightarrow L_3$; (v) $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1$.

2. Résoudre les systèmes triangulaires :

   a. $\begin{cases} 2x-y+z &= 3 \\ 3y-z &= 5 \\ 4z &= 4 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x-y+2z &= 5 \\ y-4z &= -9 \\ 5z &= 10 \end{cases}$

3. Résoudre $\begin{cases} 5x+3y &= 1 \\ 2x+7y &= 12 \end{cases}$ par une combinaison qui évite les fractions.

Leçon 3 : la méthode du pivot de Gauss

Exercice 4 : résoudre par la méthode de Gauss

Résoudre chaque système par la méthode du pivot de Gauss, en écrivant les opérations faites, puis vérifier la solution.

SenAcad, une solution de Barrotech

a. $\begin{cases} x+2y+z &= 7 \\ 2x+y-z &= 2 \\ 3x-y+2z &= 5 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x+y-3z &= -5 \\ x-y+z &= -2 \\ 3x+2y+z &= 5 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x-y+4z &= 8 \\ 4x+2y-2z &= -3 \end{cases}$

Exercice 5 : quand le pivot est nul

1. Résoudre $\begin{cases} y+2z &= 3 \\ 2x+y-z &= 1 \\ x+y+z &= 3 \end{cases}$

2. On considère $\begin{cases} x+y+z &= 4 \\ 2x+2y+3z &= 11 \\ x+3y-z &= 2 \end{cases}$

   a. Éliminer x des deux dernières lignes. Que remarque-t-on dans la deuxième ligne obtenue ?

   b. Terminer la résolution.

Leçon 4 : systèmes impossibles, systèmes indéterminés

Exercice 6 : aucune, une infinité

1. Résoudre les systèmes suivants. Quand il y a une infinité de solutions, les exprimer à l'aide d'un ou de deux paramètres.

a. $\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 2x+3y+z &= 5 \\ 3x+4y &= 6 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 2x+3y+z &= 5 \\ 3x+4y &= 7 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x-2y+z &= 2 \\ -2x+4y-2z &= -4 \\ 3x-6y+3z &= 6 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ x-y+4z &= 1 \end{cases}$

2. Parmi les solutions du système a., trouver celle dont la somme des coordonnées vaut 2.

Leçon 5 : interprétation géométrique, intersection de plans

Exercice 7 : deux plans, puis trois

On considère les plans $(P) : x+y-z=2$ et $(Q) : 2x-y+z=1$.

1. Montrer que (P) et (Q) sont sécants.
2. Résoudre le système formé par leurs deux équations. En déduire une représentation paramétrique de leur droite d'intersection Δ.
3. Calculer $\vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q$, et vérifier que ce vecteur dirige bien Δ.
4. a. Soit $(R) : 3x+y-z=4$. Montrer que Δ est contenue dans (R). Que peut-on dire des trois plans (P), (Q), (R) ?
   b. Soit $(R') : 3x+y-z=5$. Les plans (P), (Q), (R') ont-ils un point commun ? Décrire leur position.

Exercice 8 : position de trois plans

Pour chacun des systèmes suivants, calculer le produit mixte $[\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3]$ des vecteurs normaux, puis dire si les trois plans ont un seul point commun, une droite commune, ou aucun point commun. Dans le dernier cas, préciser si deux des plans sont parallèles, ou si les plans forment un prisme.

a. $\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ x-y &= 0 \\ z &= 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x+2y-z &= 1 \\ 2x+4y-2z &= 5 \\ x-y+z &= 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x+y &= 1 \\ y+z &= 1 \\ x-z &= 1 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x+y &= 1 \\ y+z &= 1 \\ x-z &= 0 \end{cases}$

Leçon 6 : déterminant d'un système, systèmes à paramètre

Exercice 9 : calculer un déterminant pour décider

1. Calculer le déterminant de chaque système, en déduire s'il a une unique solution, puis le résoudre par la méthode de Gauss.
   a. $\begin{cases} 2x+y-z &= 1 \\ x-y+2z &= 3 \\ 3x+2y+z &= 4 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x+2y+3z &= 1 \\ 4x+5y+6z &= 2 \\ 7x+8y+9z &= 3 \end{cases}$
2. Sans calculer de produit mixte, expliquer pourquoi le déterminant du système suivant est nul. Ce système a-t-il des solutions ?
   $$\begin{cases} x-y+2z &= 1 \\ 3x+y-z &= 2 \\ 4x+z &= 5 \end{cases}$$
3. *(Pour aller plus loin, non exigible.)* Retrouver la solution du système 1.a. avec les formules de Cramer.

Exercice 10 : un système à paramètre

Pour tout réel m, on considère (S_m) : $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+my+z &= 2 \\ x+y+mz &= 3 \end{cases}$

1. Montrer que le déterminant de (S_m) est $(m+1)^2$.
2. On suppose $m \neq 1$. Résoudre (S_m).
3. Résoudre (S_1), et interpréter géométriquement.
4. Pour quelle valeur de m la solution a-t-elle une première coordonnée nulle ? Donner alors cette solution.
5. On remplace les seconds membres $1, 2, 3$ par $1, 1, 1$. Résoudre le nouveau système, selon les valeurs de m.

Document généré avec l'application de BarroTech

Leçon 7 : mettre un problème en équations

Exercice 11 : mélange d'engrais (situation simplifiée)

Un maraîcher veut apporter à son champ 85 kg d'azote, 95 kg de phosphore et 80 kg de potassium. Il dispose de trois engrais, vendus en sacs :

	azote	phosphore	potassium	prix du sac
un sac d'engrais A	15 kg	5 kg	10 kg	$9\,000$ F
un sac d'engrais B	10 kg	10 kg	5 kg	$8\,000$ F
un sac d'engrais C	5 kg	15 kg	10 kg	$10\,000$ F

1. On note a, b, c les nombres de sacs d'engrais A, B, C. Écrire le système vérifié par a, b, c, et le simplifier.
2. Résoudre ce système. Combien de sacs de chaque engrais le maraîcher doit-il acheter, et combien paie-t-il ?
3. L'année suivante, il lui faut 50 kg d'azote, 100 kg de phosphore et 80 kg de potassium. Résoudre le nouveau système. Est-ce possible avec ces trois engrais ?

Exercice 12 : approfondissement

Partie A. Déterminer les réels a, b, c tels que la fonction $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ vérifie

SenAcad, une solution de Barrotech

$$P(1) = -1, \qquad P'(1) = 0, \qquad \int_0^3 P(x)\,dx = 3.$$

Partie B (un problème chinois très ancien, situation simplifiée). Un éleveur achète 100 volailles pour $100\,000$ F. Un coq coûte $5\,000$ F, une poule $3\,000$ F, et les poussins se vendent par lots de trois pour $1\,000$ F. On note x, y, z les nombres de coqs, de poules et de poussins.

1. Montrer que $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 15x + 9y + z = 300 \end{cases}$ puis que ce système équivaut à $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 7x + 4y = 100 \end{cases}$
2. Exprimer y et z en fonction de x.
3. À l'aide du théorème de Gauss (chapitre 10), montrer que x est un multiple de 4. En déduire toutes les solutions en nombres entiers naturels, puis celles où l'éleveur achète au moins un animal de chaque sorte.