Systèmes linéaires : corrigés

TERMINALE S1-S3 · CHAPITRE 14 · CORRIGÉS DÉTAILLÉS

Séries S1, S3 et S1A. Corrigés détaillés des exercices d'application. Tous les résultats ont été vérifiés par calcul exact, et recoupés par un calcul numérique indépendant. Les opérations sur les lignes sont écrites à chaque étape ; d'autres choix d'opérations conduisent aux mêmes solutions.

Leçon 1 : systèmes de deux équations à deux inconnues

Exercice 1

1. a. $\Delta = 3 \times 4 - 5 \times (-2) = 22 \neq 0$: unique solution. $\Delta_x = 4 \times 4 - 14 \times (-2) = 44$ et $\Delta_y = 3 \times 14 - 5 \times 4 = 22$, donc $x = \frac{44}{22} = 2$ et $y = \frac{22}{22} = 1$. Contrôle : $6 - 2 = 4$ et $10 + 4 = 14$. **Solution :** $(2\,;1)$.
   b. $\Delta = 0{,}5 \times (-1) - 2 \times 1{,}5 = -3{,}5$; $\Delta_x = 4 \times (-1) - 2 \times 1{,}5 = -7$; $\Delta_y = 0{,}5 \times 2 - 2 \times 4 = -7$. Donc $x = \frac{-7}{-3{,}5} = 2$ et $y = 2$. Contrôle : $1 + 3 = 4$ et $4 - 2 = 2$. **Solution :** $(2\,;2)$. *On peut aussi commencer par $L_1 \leftarrow 2L_1$, qui donne $x + 3y = 8$, sans décimales.*
2. c. $\Delta = 4 \times 9 - (-6) \times (-6) = 36 - 36 = 0$. On a $L_1 = 2 \times (2x - 3y)$ et $L_2 = -3 \times (2x - 3y)$: les deux équations équivalent à $2x - 3y = 1$. Les deux droites sont **confondues**, et le système a une infinité de solutions : en posant $y = t$, $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1+3t}{2}\,;\,t\right),\ t \in \mathbb{R}\right\}$, par exemple $(2\,;1)$ pour $t = 1$.
   d. $\Delta = 1 \times (-6) - (-2) \times 3 = 0$. L'opération $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ donne $0 = 9$: **aucune solution**. Les droites sont **parallèles et distinctes**.
3. $\Delta = 7 \times 2 - 3 \times (-5) = 29 \neq 0$: le système a une unique solution (les deux droites sont sécantes).

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 2

1. a. $\Delta = m \times m - 1 \times 1 = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$.
   b. Il y a une unique solution si, et seulement si, $\Delta \neq 0$, c'est-à-dire $m \neq 1$ et $m \neq -1$. Alors $\Delta_x = 1 \times m - 1 \times 1 = m - 1$ et $\Delta_y = m \times 1 - 1 \times 1 = m - 1$, donc
   $$x = y = \frac{m-1}{(m-1)(m+1)} = \frac{1}{m+1}.$$
   c. (S_1) : les deux équations sont $x + y = 1$: droites **confondues**, une infinité de solutions $(1 - t\,;t)$, t réel.
   (S_{-1}) : $-x + y = 1$ et $x - y = 1$; $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ donne $0 = 2$: **aucune solution**, les droites sont parallèles et distinctes.
2. a. $L_1 + L_2$ donne $2x = 4$, donc $x = 2$, puis $y = 1$: solution $(2\,;1)$.
   b. Le système des trois équations a une solution si, et seulement si, le couple $(2\,;1)$ vérifie la troisième : $4 + 1 = k$, soit $k = 5$. Pour $k = 5$, les trois droites sont **concourantes** en $(2\,;1)$; pour $k \neq 5$, la troisième droite ne passe pas par ce point et le système n'a aucune solution.

Leçon 2 : systèmes équivalents et opérations sur les lignes

Exercice 3

1. a. $2-1+0=1$, $4-1-0=3$ et $2+1+0=3$: $(2\,;-1\,;0)$ est solution.
   b. (i) **Oui** : c'est une opération du type $L_i \leftarrow L_i + k\,L_j$.
   (ii) **Non** : multiplier par 0 remplace L_3 par $0=0$, et l'information de L_3 est perdue (il reste deux équations, qui ont une infinité de solutions).
   (iii) **Non** : on modifie deux lignes en même temps, chacune à l'aide de l'autre. Les deux nouvelles lignes sont identiques, $3x+2y=4$, et le nouveau système n'est pas équivalent : par exemple $\left(0\,;2\,;\frac{5}{2}\right)$ en est solution ($0+4=4$ et $0-2+5=3$), mais pas de (S) ($0+2+\frac{5}{2}\neq 1$).
   (iv) **Oui** : échange de deux lignes.
   (v) **Oui** : c'est la combinaison $\alpha\,L_3+\beta\,L_1$ avec $\alpha=2\neq 0$.
2. a. $4z=4$ donne $z=1$; puis $3y=5+1=6$, $y=2$; puis $2x=3+2-1=4$, $x=2$. **Solution :** $(2\,;2\,;1)$.
   b. $z=2$; puis $y=-9+4\times 2=-1$; puis $x=5+y-2z=5-1-4=0$. **Solution :** $(0\,;-1\,;2)$.
3. $L_2 \leftarrow 5L_2-2L_1$: $(10x+35y)-(10x+6y)=60-2$, soit $29y=58$, donc $y=2$. Puis $5x=1-6=-5$, $x=-1$. Contrôle : $-2+14=12$. **Solution :** $(-1\,;2)$.

Leçon 3 : la méthode du pivot de Gauss

Exercice 4

SenAcad, une solution de BarroTech

a. Pivot 1 en L_1. $L_2 \leftarrow L_2-2L_1$: $-3y-3z=-12$, que l'on simplifie par $L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2$: $y+z=4$. $L_3 \leftarrow L_3-3L_1$: $-7y-z=-16$. Puis $L_3 \leftarrow L_3+7L_2$: $6z=12$.

$$\begin{cases} x+2y+z &= 7 \\ y+z &= 4 \\ 6z &= 12 \end{cases}$$

Donc $z=2$, $y=2$, $x=7-4-2=1$. Contrôle : $1+4+2=7$, $2+2-2=2$, $3-2+4=5$. **Solution :** $(1\,;2\,;2)$.

b. $L_1 \leftrightarrow L_2$ pour avoir le pivot 1 :

$$\begin{cases} x-y+z &= -2 \\ 2x+y-3z &= -5 \\ 3x+2y+z &= 5 \end{cases}$$

Puis $L_2 \leftarrow L_2-2L_1$: $3y-5z=-1$; $L_3 \leftarrow L_3-3L_1$: $5y-2z=11$; $L_3 \leftarrow 3L_3-5L_2$: $19z=38$. Donc $z=2$, $3y=-1+10=9$, $y=3$, et $x=-2+3-2=-1$. Contrôle dans le système de départ : $-2+3-6=-5$, $-1-3+2=-2$, $-3+6+2=5$. **Solution :** $(-1\,;3\,;2)$.

c. $L_2 \leftarrow L_2-2L_1$: $-3y+2z=6$; $L_3 \leftarrow L_3-4L_1$: $-2y-6z=-7$; $L_3 \leftarrow 3L_3-2L_2$: $-22z=-33$. Donc $z=\frac{3}{2}$, puis $-3y=6-3=3$, $y=-1$, puis $x=1+1-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$. Contrôle : $\frac{1}{2}-1+\frac{3}{2}=1$, $1+1+6=8$, $2-2-3=-3$. **Solution :** $\left(\frac{1}{2}\,;-1\,;\frac{3}{2}\right)$.

Exercice 5

1. La première ligne ne contient pas x : $L_1 \leftrightarrow L_3$ donne

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ 2x+y-z &= 1 \\ y+2z &= 3 \end{cases}$$

Puis $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: $-y-3z=-5$, et $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$: $-z=-2$. Donc $z=2$, $-y=-5+6$, $y=-1$, et $x=3+1-2=2$. Contrôle : $-1+4=3$, $4-1-2=1$, $2-1+2=3$. **Solution :** $(2\,;-1\,;2)$.

2. a. $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne $z=3$, et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donne $2y-2z=-2$. **La deuxième ligne ne contient plus** y : le pivot en y est nul. On échange L_2 et L_3.
b. On obtient le système triangulaire

$$\begin{cases} x+y+z &= 4 \\ 2y-2z &= -2 \\ z &= 3 \end{cases}$$

Donc $z=3$, $2y=-2+6=4$, $y=2$, et $x=4-2-3=-1$. Contrôle : $-2+4+9=11$ et $-1+6-3=2$. **Solution :** $(-1\,;2\,;3)$.

Leçon 4 : systèmes impossibles, systèmes indéterminés

Exercice 6

SoyAcad, une solution de BrainTech

1. a. $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: $y+3z=3$; $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$: $y+3z=3$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$: $0=0$, que l'on supprime. On pose $z=t$: $y=3-3t$, puis $x=1-y+z=-2+4t$.

$$\mathcal{S} = \{(-2+4t\,;\ 3-3t\,;\ t),\ t\in\mathbb{R}\}.$$

Contrôle dans L_3 : $3(-2+4t)+4(3-3t)=6$ pour tout t.
b. Les mêmes opérations donnent $y+3z=4$ en troisième ligne, puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donne $0=1$: **aucune solution**, $\mathcal{S}=\varnothing$.
c. $L_2=-2L_1$ et $L_3=3L_1$: $L_2 \leftarrow L_2+2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3-3L_1$ donnent $0=0$ deux fois. Il reste $x=2+2y-z$. Avec $y=s$ et $z=t$:

$$\mathcal{S} = \{(2+2s-t\,;\ s\,;\ t),\ s\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}\}$$

(les trois équations sont celles d'un même plan).
d. $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$: $-2y+2z=-2$, soit $y=1+z$. On pose $z=t$: $y=1+t$, $x=3-(1+t)-2t=2-3t$. $\mathcal{S}=\{(2-3t\,;\ 1+t\,;\ t),\ t\in\mathbb{R}\}$.

2. $(-2+4t)+(3-3t)+t=1+2t=2$ donne $t=\frac{1}{2}$: la solution cherchée est $\left(0\,;\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$. Contrôle : $0+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$, $0+\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=5$, $0+6=6$.

Leçon 5 : interprétation géométrique, intersection de plans

Exercice 7

1. $\vec{n}_P\,(1\,;1\,;-1)$ et $\vec{n}_Q\,(2\,;-1\,;1)$ ne sont pas colinéaires (la première coordonnée double, la deuxième change de signe) : les plans sont **sécants**.
2. $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: $-3y+3z=-3$, soit $y=1+z$. Avec $z=t$: $y=1+t$ et $x=2-y+z=1$. Donc
$$\Delta : \begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=t \end{cases} \qquad (t\in\mathbb{R}),$$
la droite passant par $(1\,;1\,;0)$, dirigée par $\vec{u}\,(0\,;1\,;1)$.
3. $\vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q = \big(1\times 1-(-1)\times(-1)\,;\ (-1)\times 2-1\times 1\,;\ 1\times(-1)-1\times 2\big) = (0\,;-3\,;-3) = -3\,\vec{u}$: il est colinéaire à $\vec{u}$, il dirige bien Δ.
4. a. Pour tout t, $3\times 1+(1+t)-t=4$: tous les points de Δ sont dans (R). Les trois plans **contiennent la même droite** Δ (comme les pages d'un livre ouvert) : le système des trois équations a pour solutions les points de Δ.
   b. Pour tout t, $3+(1+t)-t=4\neq 5$: aucun point de Δ n'est dans (R'), donc les trois plans n'ont **aucun point commun**. $\vec{n}_{R'}\,(3\,;1\,;-1)$ n'est colinéaire ni à $\vec{n}_P$ ni à $\vec{n}_Q$: les plans se coupent deux à deux suivant trois droites parallèles à Δ (elles sont toutes orthogonales aux trois vecteurs normaux, qui sont coplanaires) : ils forment un **prisme**.

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 8

a. $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (1\,;1\,;1)\wedge(1\,;-1\,;0) = (1\,;1\,;-2)$, et $[\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3] = (1\,;1\,;-2)\cdot(0\,;0\,;1) = -2\neq 0$: **un seul point commun**. $z=1$, $x=y$, $2x+1=3$: c'est le point $(1\,;1\,;1)$.

b. $\vec{n}_2 = 2\,\vec{n}_1$, donc $\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2=\vec{0}$ et le produit mixte est nul. $L_2\leftarrow L_2-2L_1$ donne $0=3$: les deux premiers plans sont **parallèles et distincts**, il n'y a **aucun point commun**.

c. $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (1\,;1\,;0)\wedge(0\,;1\,;1) = (1\,;-1\,;1)$, et $[\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3] = (1\,;-1\,;1)\cdot(1\,;0\,;-1) = 0$: en effet $\vec{n}_3 = \vec{n}_1 - \vec{n}_2$. L'opération $L_3\leftarrow L_3-L_1+L_2$ donne $0=1$: **aucun point commun**. Aucun des vecteurs normaux n'est colinéaire à un autre : les plans se coupent deux à deux, ils forment un **prisme**.

d. Mêmes vecteurs normaux, produit mixte nul. $L_3\leftarrow L_3-L_1+L_2$ donne $0=0$. En posant $x=t$: $y=1-t$ et $z=1-y=t$. Les trois plans ont **une droite commune**, formée des points $(t\,;1-t\,;t)$.

Leçon 6 : déterminant d'un système, systèmes à paramètre

Exercice 9

1. a. $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (2\,;1\,;-1) \wedge (1\,;-1\,;2) = (1\,;-5\,;-3)$, et $\Delta = (1\,;-5\,;-3)\cdot(3\,;2\,;1) = 3-10-3 = -10 \neq 0$: **unique solution**. Gauss : $L_1 \leftrightarrow L_2$ (pivot 1) ; $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: $3y - 5z = -5$; $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$: $5y - 5z = -5$, simplifiée en $y - z = -1$; $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2$: $2z = 2$. Donc $z = 1$, $y = 0$, $x = 3 + y - 2z = 1$. Contrôle : $2 + 0 - 1 = 1$, $1 - 0 + 2 = 3$, $3 + 0 + 1 = 4$. **Solution :** $(1\,;0\,;1)$.
   b. $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (1\,;2\,;3) \wedge (4\,;5\,;6) = (-3\,;6\,;-3)$, et $\Delta = -21 + 48 - 27 = 0$: pas de solution unique. Gauss : $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$: $-3y - 6z = -2$; $L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1$: $-6y - 12z = -4$; $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$: $0 = 0$. Avec $z = t$: $y = \frac{2}{3} - 2t$, puis $x = 1 - 2y - 3z = -\frac{1}{3} + t$.
   $$\mathcal{S} = \left\{\left(-\tfrac{1}{3} + t\,;\ \tfrac{2}{3} - 2t\,;\ t\right),\ t \in \mathbb{R}\right\} :$$
   les trois plans contiennent une même droite.
2. Les coefficients de la troisième ligne sont la somme de ceux des deux premières : $(4\,;0\,;1) = (1\,;-1\,;2) + (3\,;1\,;-1)$. Les vecteurs normaux sont coplanaires, donc $\Delta = 0$. L'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$ donne $0 = 5 - 1 - 2 = 2$: **aucune solution** (les trois plans forment un prisme, aucun vecteur normal n'étant colinéaire à un autre).
3. *(Non exigible.)* En remplaçant tour à tour la colonne des coefficients de x, de y, de z par celle des seconds membres $(1\,;3\,;4)$:
   $$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -10,\quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0,\quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -10.$$
   Donc $x = \frac{-10}{-10} = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

Exercice 10

1. $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (1\,;1\,;1) \wedge (1\,;m\,;1) = (1-m\,;\ 0\,;\ m-1)$, puis $\Delta = (1-m)\times 1 + 0 \times 1 + (m-1)\times m = (m-1)(m-1) = (m-1)^2$.
2. $m \neq 1$. $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$: $(m-1)\,y = 1$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: $(m-1)\,z = 2$. Donc $y = \dfrac{1}{m-1}$, $z = \dfrac{2}{m-1}$, et $x = 1 - y - z = \dfrac{m-4}{m-1}$. Unique solution : $\left(\dfrac{m-4}{m-1}\,;\ \dfrac{1}{m-1}\,;\ \dfrac{2}{m-1}\right)$.
3. (S_1) : $x + y + z = 1$, $x + y + z = 2$, $x + y + z = 3$; $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $0 = 1$: **aucune solution**. Les trois plans ont le même vecteur normal $(1\,;1\,;1)$: ils sont **parallèles et distincts**.
4. $\dfrac{m-4}{m-1} = 0$ pour $m = 4$. La solution est alors $\left(0\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{2}{3}\right)$. Contrôle : $0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$, $\frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$, $\frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3$.
5. Si $m \neq 1$: $(m-1)y = 0$ et $(m-1)z = 0$, donc $y = z = 0$ et $x = 1$: unique solution $(1\,;0\,;0)$. Si $m = 1$: les trois équations sont $x + y + z = 1$; les trois plans sont **confondus**, et $\mathcal{S} = \{(1 - s - t\,;\ s\,;\ t),\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

Leçon 7 : mettre un problème en équations

Exercice 11

1. En comptant l'azote, le phosphore et le potassium apportés :

$$\begin{cases} 15a+10b+5c &= 85 \\ 5a+10b+15c &= 95 \\ 10a+5b+10c &= 80 \end{cases} \iff \begin{cases} 3a+2b+c &= 17 \\ a+2b+3c &= 19 \\ 2a+b+2c &= 16 \end{cases} \quad (\text{chaque ligne divisée par } 5).$$

2. $L_1 \leftrightarrow L_2$ (pivot 1). $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$: $-4b-8c=-40$, simplifiée en $b+2c=10$; $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$: $-3b-4c=-22$; $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$: $2c=8$. Donc $c=4$, $b=10-8=2$, $a=19-4-12=3$. Contrôle : azote $45+20+20=85$, phosphore $15+20+60=95$, potassium $30+10+40=80$. **Le maraîcher achète 3 sacs d'engrais A, 2 sacs de B et 4 sacs de C**, pour $3\times 9\,000+2\times 8\,000+4\times 10\,000=83\,000$ F.

3. Le système devient $3a+2b+c=10$, $a+2b+3c=20$, $2a+b+2c=16$. Les mêmes opérations donnent $b+2c=\frac{25}{2}$, puis $2c=\frac{27}{2}$: $c=\frac{27}{4}$, $b=-1$, $a=\frac{7}{4}$. Le système a une solution, mais elle **ne convient pas** : un nombre de sacs ne peut pas être négatif ($b=-1$), ni fractionnaire. **Ce n'est pas possible avec ces trois engrais.**

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 12

Partie A. $P(1) = a+b+c$, $P'(x) = 2ax + b$ donc $P'(1) = 2a + b$, et

$$\int_0^3 (ax^2 + bx + c)\,dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right]_0^3 = 9a + \frac{9}{2}b + 3c.$$

La troisième condition, multipliée par $\frac{2}{3}$, s'écrit $6a + 3b + 2c = 2$. Le système

$$\begin{cases} a + b + c &= -1 \\ 2a + b &= 0 \\ 6a + 3b + 2c &= 2 \end{cases}$$

se résout par $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: $-b - 2c = 2$; $L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1$: $-3b - 4c = 8$; $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$: $2c = 2$. Donc $c = 1$, $b = -4$, $a = 2$: $P(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Contrôle : $P(1) = -1$, $P'(1) = 4 - 4 = 0$, $\int_0^3 P(x)\,dx = 18 - 18 + 3 = 3$.

Partie B.

1. Il y a 100 volailles : $x + y + z = 100$. Les z poussins forment $\frac{z}{3}$ lots, donc le prix total est $5\,000x + 3\,000y + 1\,000 \times \frac{z}{3} = 100\,000$; en multipliant par $\frac{3}{1\,000}$: $15x + 9y + z = 300$. Puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $14x + 8y = 200$, et $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$ donne $7x + 4y = 100$: ce sont des opérations élémentaires, le système obtenu est équivalent.
2. $y = \dfrac{100 - 7x}{4}$ et $z = 100 - x - y = \dfrac{300 + 3x}{4}$ (c'est un système indéterminé, de paramètre x).
3. $7x = 4(25 - y)$: 4 divise $7x$. Comme 4 et 7 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss montre que 4 divise x : $x = 4k$, k entier naturel. Alors $y = 25 - 7k$ et $z = 75 + 3k$. La condition $y \geq 0$ impose $k \leq 3$. **Solutions en entiers naturels :**

SenAcad, une solution de BarroTech

k	**coqs** x	**poules** y	**poussins** z
0	0	25	75
1	4	18	78
2	8	11	81
3	12	4	84

Le nombre de poussins $z = 75 + 3k$ est bien un multiple de 3 (lots de trois). Avec au moins un animal de chaque sorte, il reste **trois achats possibles** : $(4\,;18\,;78)$, $(8\,;11\,;81)$ et $(12\,;4\,;84)$. Contrôle pour le premier : $4 + 18 + 78 = 100$ et $20\,000 + 54\,000 + 26\,000 = 100\,000$.