Exercices

TERMINALE S1-S3 · CHAPITRE 13 · COURBES PARAMÉTRÉES ET CONIQUES

Séries S1, S3 et S1A. Un ou deux exercices par leçon, du plus simple au plus complet ; l'exercice 13 est un exercice de synthèse. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Faire une figure à chaque exercice. Corrigés détaillés : fiche « Corrigés ».

Leçon 1 : courbes paramétrées et tangente

Exercice 1 : reconnaître des courbes, un lieu géométrique

1. Reconnaître la courbe Γ_1 : $x = 1 + 2\cos t$, $y = -3 + 2\sin t$, $t \in [0\,;2\pi[$.
2. Démontrer que la courbe Γ_2 : $x = 2t - 1$, $y = 3 - t$, $t \in \mathbb{R}$, est une droite dont on donnera une équation cartésienne.
3. Soit Γ_3 : $x = \cos t$, $y = \cos 2t$, $t \in [0\,;\pi]$.
   - **a.** Démontrer que les coordonnées des points de Γ_3 vérifient $y = 2x^2 - 1$.
   - **b.** Quelle partie de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 1$ la courbe Γ_3 représente-t-elle ?
4. **L'échelle.** Une échelle $[AB]$ de longueur 4 glisse, son pied A sur l'axe des abscisses et son sommet B sur l'axe des ordonnées : $A(4\cos t\,;0)$ et $B(0\,;4\sin t)$, avec $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
   - **a.** Quel ensemble décrit le milieu I de $[AB]$?
   - **b.** Soit M le point de $[AB]$ tel que $AM = 1$. Démontrer que $M(3\cos t\,;\sin t)$, puis que ses coordonnées vérifient $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 2 : tangentes et point double

On considère la courbe Γ définie par $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = t^3 - 3t$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Comparer $M(-t)$ et $M(t)$. Que peut-on en déduire pour Γ ?
2. Calculer le vecteur dérivé $\vec{v}(t)$. Démontrer qu'il n'est jamais nul.
3. Déterminer les points de Γ où la tangente est horizontale, puis ceux où elle est verticale.
4. Déterminer une équation de la tangente au point $M(2)$.
5. Démontrer que $M\left(\sqrt{3}\right) = M\left(-\sqrt{3}\right)$: on dit que ce point est un **point double**. Donner les coefficients directeurs des deux tangentes en ce point.
6. Démontrer que les points de Γ vérifient $y^2 = (x-1)(x-4)^2$.

Leçon 2 : vitesse et accélération

Exercice 3 : deux mouvements

Partie A. Un point se déplace selon $x(t) = 2\cos(3t)$, $y(t) = 2\sin(3t)$, $t \geq 0$.

1. Quelle est sa trajectoire ?
2. Calculer $\vec{v}(t)$ et la vitesse $\|\vec{v}(t)\|$. Le mouvement est-il uniforme ?
3. Calculer $\vec{a}(t)$ et l'exprimer à l'aide de $\overrightarrow{OM}(t)$. Quelle est la norme de l'accélération ?

Partie B. Un point se déplace selon $x(t) = e^t \cos t$, $y(t) = e^t \sin t$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $OM(t)$. Comment évolue la distance du point à l'origine ?
2. Calculer $\vec{v}(t)$ et démontrer que $\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{2}\, e^t$.
3. Calculer $\overrightarrow{OM}(t) \cdot \vec{v}(t)$, puis le cosinus de l'angle géométrique entre $\overrightarrow{OM}(t)$ et $\vec{v}(t)$. Que remarque-t-on ?
4. Calculer $\vec{a}(t)$. Démontrer que $\vec{a}(t)$ est orthogonal à $\overrightarrow{OM}(t)$, puis calculer $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)$. Le mouvement est-il accéléré ou retardé ?

Exercice 4 : un tir, modèle simplifié

Un ballon est lancé depuis le point O. Avec des unités simplifiées (mètres et secondes), sa position à l'instant t est $x(t) = 3t$, $y(t) = 4t - 5t^2$, tant que $y(t) \geq 0$.

1. Démontrer que la trajectoire est un arc de la parabole d'équation $y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{9}x^2$.
2. Calculer $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$. Que remarque-t-on pour l'accélération ?
3. À quel instant le ballon est-il au plus haut ? Donner ses coordonnées et la direction de sa vitesse à cet instant.
4. À quel instant retombe-t-il au sol ? À quelle distance de O ?
5. Calculer la vitesse au départ, au sommet et à l'arrivée au sol.
6. Calculer $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)$. Sur quel intervalle de temps le mouvement est-il retardé ? accéléré ?

Leçon 3 : représenter une courbe paramétrée

Exercice 5 : une courbe de Lissajous

On considère la courbe Γ définie par $x(t) = \sin t$, $y(t) = \sin 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Justifier qu'il suffit d'étudier Γ sur un intervalle de longueur 2π.
2. Comparer $M(-t)$ et $M(t)$, puis $M(\pi - t)$ et $M(t)$. En déduire qu'il suffit d'étudier Γ pour $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, et indiquer comment obtenir la courbe entière.
3. Dresser le tableau de variations conjoint de x et de y sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
4. Préciser les points à tangente horizontale et à tangente verticale, ainsi que la tangente au point O pour $t = 0$.
5. Tracer Γ. Démontrer que Γ passe deux fois par O et donner la tangente en O pour $t = \pi$.
6. Démontrer que les points de Γ vérifient $y^2 = 4x^2\left(1 - x^2\right)$.

Leçon 4 : la cycloïde

Exercice 6 : la roue de rayon 2

Une roue de rayon 2 roule sans glisser sur l'axe des abscisses. Un point M de son bord, en O au départ, décrit la cycloïde

$$x(t) = 2(t - \sin t), \qquad y(t) = 2(1 - \cos t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

SanAcad, une solution de BorroTech

1. Comparer $M(t + 2\pi)$ et $M(t)$, puis $M(2\pi - t)$ et $M(t)$. Quel intervalle d'étude suffit-il de choisir ?
2. Calculer $\vec{v}(t)$ et démontrer que $\|\vec{v}(t)\| = 4\left|\sin\frac{t}{2}\right|$. Quels sont les points stationnaires ?
3. Dresser le tableau de variations conjoint sur $[0\,;\pi]$. Quelles sont la largeur et la hauteur d'une arche ?
4. Déterminer une équation de la tangente au point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
5. À l'instant t, le centre de la roue est $C(2t\,;2)$ et son point le plus haut est $T(2t\,;4)$. Démontrer que, pour $t \in]0\,;2\pi[$, la tangente en $M(t)$ passe par T.
6. Calculer $\vec{a}(t)$ et démontrer que $\vec{a}(t) = \overrightarrow{MC}$. En quel point de l'arche la vitesse est-elle maximale, et combien vaut-elle ?

Leçon 5 : coniques, foyer et directrice ; la parabole

Exercice 7 : des paraboles

1. Déterminer une équation de la parabole de foyer $F(3\,;0)$ et de directrice $x=-3$. Quels sont ses points d'abscisse 3 ? Vérifier que leur distance au foyer est égale à leur distance à la directrice.
2. Démontrer que la courbe d'équation $y=\frac{x^2}{8}$ est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice. Vérifier la définition avec le point $M(4\,;2)$.
3. Déterminer une équation de la parabole de foyer $F(1\,;2)$ et de directrice $D : y=-2$. Préciser son sommet.
4. Reconnaître la courbe $x=\frac{t^2}{4}$, $y=t$, $t\in\mathbb{R}$, et préciser son foyer et sa directrice.

Exercice 8 : une conique définie par foyer et directrice

Soit $\mathcal{C}$ la conique de foyer $F(2\,;0)$, de directrice $D : x=8$ et d'excentricité $e=\frac{1}{2}$.

1. Quelle est la nature de $\mathcal{C}$? Quel est son axe focal ?
2. Soit K le projeté orthogonal de F sur D. Calculer les coordonnées des sommets $S=\mathrm{bar}\{(F,1),(K,e)\}$ et $S'=\mathrm{bar}\{(F,1),(K,-e)\}$.
3. Le point $M(2\,;3)$ appartient-il à $\mathcal{C}$?
4. Démontrer qu'un point $M(x\,;y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $3x^2+4y^2=48$. Retrouver les sommets de la question 2.

Leçon 6 : l'ellipse

Exercice 9 : éléments d'une ellipse

1. On considère l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $9x^2 + 25y^2 = 225$.
   - **a.** Écrire son équation réduite. Déterminer a, b, c et l'excentricité.
   - **b.** Donner ses sommets, ses foyers F (abscisse positive) et F', et ses directrices.
2. Vérifier que $M\left(3\,;\frac{12}{5}\right)$ appartient à $\mathcal{E}$. Calculer MF et MF', et vérifier que $MF + MF' = 2a$ et que $MF = a - ex$.
3. Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{E}$, et une valeur du paramètre qui donne le point M (on donnera $\cos t$ et $\sin t$).
4. Démontrer que $\mathcal{E}$ est l'image du cercle $x^2 + y^2 = 25$ par une affinité orthogonale dont on précisera l'axe et le rapport. Quel est l'antécédent de M sur le cercle ?
5. Mêmes questions qu'en 1 pour l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Exercice 10 : le massif du jardinier, modèle simplifié

Un jardinier veut tracer un massif de fleurs en forme d'ellipse, de 8 m de long et de 6 m de large, avec deux piquets et une corde.

1. On prend pour repère le centre du massif et ses axes (unité : le mètre). Donner l'équation réduite de l'ellipse. Où faut-il planter les piquets F et F', et quelle longueur de corde faut-il prendre ? Donner une valeur approchée au centimètre.
2. Calculer l'excentricité.
3. On plante un rosier au point M du bord d'abscisse 2 et d'ordonnée positive. Calculer son ordonnée, puis les distances MF et MF' (avec F d'abscisse positive), et vérifier leur somme.
4. **Construction par les deux cercles.** On trace les cercles de centre O et de rayons 4 et 3. La demi-droite issue de O qui fait l'angle $\frac{\pi}{3}$ avec $\vec{i}$ les coupe en P et Q. Calculer les coordonnées de P et de Q, puis celles du point qui a l'abscisse de P et l'ordonnée de Q. Que remarque-t-on ?

Leçon 7 : l'hyperbole

Exercice 11 : trois hyperboles

Partie A. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

1. Déterminer a, b, c, l'excentricité, les sommets, les foyers, les directrices et les asymptotes. Tracer $\mathcal{H}$ avec le rectangle de ses asymptotes.
2. Vérifier que $M\left(5\,;\frac{9}{4}\right)$ est sur $\mathcal{H}$. Calculer MF et MF', et vérifier que $|MF - MF'| = 2a$.
3. Pour la représentation $x = \frac{4}{\cos t}$, $y = 3\tan t$, donner $\cos t$ et $\tan t$ pour le point M.
4. Écrire l'équation de $\mathcal{H}$ dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ des asymptotes, avec $\vec{u} = \frac{1}{5}\left(4\vec{i} + 3\vec{j}\right)$ et $\vec{v} = \frac{1}{5}\left(4\vec{i} - 3\vec{j}\right)$.

Partie B. Démontrer que la conique de foyer $F(4\,;0)$, de directrice $x = 1$ et d'excentricité 2 a pour équation $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. Retrouver ses sommets par les barycentres du théorème 4, puis donner ses asymptotes.

Partie C. On considère la courbe $\mathcal{H}'$ d'équation $y = \frac{8}{x}$.

1. Avec $X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ et $Y = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$, démontrer que $xy = 8$ équivaut à $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{16} = 1$.
2. En déduire que $\mathcal{H}'$ est une hyperbole équilatère, et donner ses sommets et ses foyers dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
3. Vérifier la propriété bifocale avec le point $M(2\,;4)$.

de BarroTech

Leçon 8 : reconnaître une conique ; tangente

Exercice 12 : nature et éléments

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques (centre ou sommet, foyers, excentricité, et asymptotes s'il y a lieu) des courbes suivantes.

1. $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0$.
2. $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$.
3. $x^2 + 6x - 4y + 1 = 0$ (préciser le foyer et la directrice).
4. $x = 1 + 2\cos t$, $y = -1 + 3\sin t$, $t \in [0\,;2\pi[$.
5. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$.

Exercice 13 : une ellipse, ses tangentes et un mouvement (synthèse)

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

1. Déterminer ses sommets, ses foyers F (abscisse positive) et F', son excentricité et ses directrices D et D'.
2. Vérifier que $M_0\left(1\,;\frac{3}{2}\right)$ appartient à $\mathcal{E}$ et calculer $M_0F + M_0F'$.
3. Déterminer une équation de la tangente T_0 à $\mathcal{E}$ en M_0 par la règle du dédoublement. Démontrer que T_0 coupe l'axe focal en un point de la directrice D.
4. On utilise la représentation $x = 2\cos t$, $y = \sqrt{3}\sin t$. Pour quelle valeur $t_0 \in [0\,;2\pi[$ obtient-on M_0 ? Retrouver l'équation de T_0 avec le vecteur dérivé.
5. Soit P le point du cercle principal $x^2 + y^2 = 4$ de même abscisse que M_0 et d'ordonnée positive. Déterminer la tangente au cercle en P et vérifier qu'elle coupe (Ox) au même point que T_0.
6. Le point $M(t)$ se déplace sur $\mathcal{E}$, t étant le temps.
   - **a.** Calculer $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$. Démontrer que $\vec{a}(t) = -\overrightarrow{OM}(t)$.
   - **b.** Démontrer que $\|\vec{v}(t)\|^2 = 3 + \sin^2 t$. En quels points la vitesse est-elle maximale ? minimale ?
   - **c.** Calculer $\vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t)$ et préciser si le mouvement est accéléré ou retardé pour $t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

SenAcad, une solution de BarroTech