Corrigés détaillés

TERMINALE S1-S3 · CHAPITRE 13 · COURBES PARAMÉTRÉES ET CONIQUES

Chaque résultat a été vérifié par calcul exact. Les rappels de méthode sont en italique.

Exercice 1

1. $\cos t = \dfrac{x-1}{2}$ et $\sin t = \dfrac{y+3}{2}$, donc $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$. Quand t décrit $[0\,;2\pi[$, le point fait un tour complet : Γ_1 est le **cercle de centre** $(1\,;-3)$ **et de rayon** 2.
2. $t = 3 - y$, donc $x = 2(3-y) - 1 = 5 - 2y$: les points vérifient $x + 2y - 5 = 0$. Réciproquement, tout point de cette droite s'obtient avec $t = 3 - y$. Γ_2 est la **droite d'équation** $x + 2y - 5 = 0$, passant par $(-1\,;3)$ (pour $t = 0$) et dirigée par $\vec{u}\,(2\,;-1)$.
3. **a.** $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$, donc $y = 2x^2 - 1$. **b.** Quand t décrit $[0\,;\pi]$, $x = \cos t$ décrit $[-1\,;1]$ (une seule fois). Γ_3 est l'**arc de la parabole** $y = 2x^2 - 1$ **formé des points d'abscisse comprise entre** -1 **et** 1, de $(1\,;1)$ à $(-1\,;1)$ en passant par le sommet $(0\,;-1)$.
4. **a.** $I(2\cos t\,;2\sin t)$ et $OI = 2$: I décrit le **quart de cercle de centre** O **et de rayon** 2 situé dans le quart de plan $x \geq 0$, $y \geq 0$. **b.** $AB = 4$ et $AM = 1$, donc $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$: $x_M = 4\cos t + \frac{1}{4}(0 - 4\cos t) = 3\cos t$ et $y_M = 0 + \frac{1}{4} \times 4\sin t = \sin t$. Alors $\frac{x^2}{9} + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$: M décrit un quart d'ellipse.

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 2

1. $x(-t) = t^2 + 1 = x(t)$ et $y(-t) = -t^3 + 3t = -y(t)$: $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à (Ox). Γ **est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.**
2. $\vec{v}(t)\,(2t\,;3t^2 - 3)$. Si $2t = 0$, alors $t = 0$ et $3t^2 - 3 = -3 \neq 0$: $\vec{v}(t)$ **n'est jamais nul**.
3. *Tangente horizontale : $y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$.* $3t^2 - 3 = 0$ pour $t = 1$ ou $t = -1$ (et alors $x' = \pm 2 \neq 0$) : tangentes horizontales aux points $(2\,;-2)$ et $(2\,;2)$. *Tangente verticale : $x'(t) = 0$ et $y'(t) \neq 0$.* $t = 0$: tangente verticale au point $(1\,;0)$.
4. $M(2) = (5\,;2)$ et $\vec{v}(2)\,(4\,;9)$. *Théorème 1 :* $9(x-5) - 4(y-2) = 0$, soit $9x - 4y - 37 = 0$.
5. $x\big(\pm\sqrt{3}\big) = 3 + 1 = 4$ et $y\big(\sqrt{3}\big) = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0 = y\big(-\sqrt{3}\big)$: $M\big(\sqrt{3}\big) = M\big(-\sqrt{3}\big) = (4\,;0)$. En ce point, $\vec{v}\big(\sqrt{3}\big)\big(2\sqrt{3}\,;6\big)$ et $\vec{v}\big(-\sqrt{3}\big)\big(-2\sqrt{3}\,;6\big)$: les deux tangentes ont pour coefficients directeurs $\dfrac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.
6. $y^2 = t^2\big(t^2 - 3\big)^2$ avec $t^2 = x - 1$, donc $y^2 = (x-1)(x-1-3)^2 = (x-1)(x-4)^2$.

Exercice 3

Partie A.

1. $x^2 + y^2 = 4$: la trajectoire est le **cercle de centre O et de rayon** 2.
2. $\vec{v}(t)\,\big(-6\sin(3t)\,;6\cos(3t)\big)$ et $\|\vec{v}(t)\| = 6$: le mouvement est **uniforme**.
3. $\vec{a}(t)\,\big(-18\cos(3t)\,;-18\sin(3t)\big) = -9\,\overrightarrow{OM}(t)$: l'accélération est dirigée vers le centre, de norme 18.

Partie B.

1. $OM(t) = \sqrt{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t} = e^t$: la distance à l'origine **augmente** avec t (le point s'éloigne en spirale).
2. $x'(t) = e^t(\cos t - \sin t)$ et $y'(t) = e^t(\sin t + \cos t)$. Alors $\|\vec{v}(t)\|^2 = e^{2t}\big[(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2\big] = 2e^{2t}$, donc $\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{2}\,e^t$.
3. $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{v} = e^{2t}\big[\cos t(\cos t - \sin t) + \sin t(\sin t + \cos t)\big] = e^{2t}$. Le cosinus de l'angle vaut $\dfrac{e^{2t}}{e^t \times \sqrt{2}\,e^t} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: **l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ est toujours $\frac{\pi}{4}$**.
4. $x''(t) = e^t(\cos t - \sin t) + e^t(-\sin t - \cos t) = -2e^t\sin t$ et $y''(t) = 2e^t\cos t$: $\vec{a}(t)\,\big(-2e^t\sin t\,;2e^t\cos t\big)$. $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{a} = e^{2t}(-2\cos t\sin t + 2\sin t\cos t) = 0$: $\vec{a}\perp\overrightarrow{OM}$. $\vec{v}\cdot\vec{a} = e^{2t}\big[-2\sin t(\cos t - \sin t) + 2\cos t(\sin t + \cos t)\big] = 2e^{2t} > 0$: le mouvement est **accéléré** (théorème 2), ce que confirme $\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{2}\,e^t$, croissante.

Rédigé par la solution de BarroTech

Exercice 4

1. $t = \dfrac{x}{3}$, donc $y = \dfrac{4x}{3} - 5 \times \dfrac{x^2}{9} = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{5}{9}x^2$.
2. $\vec{v}(t)\,(3\,;4-10t)$ et $\vec{a}(t)\,(0\,;-10)$: l'accélération est **constante, verticale, vers le bas**, de norme 10 (comme la pesanteur, arrondie à 10).
3. $y'(t) = 0$ pour $t = 0{,}4$: le ballon est au plus haut au point $(1{,}2\,;0{,}8)$, avec $\vec{v}(0{,}4)\,(3\,;0)$, **horizontale**.
4. $4t - 5t^2 = t(4-5t) = 0$ pour $t = 0$ ou $t = 0{,}8$. Il retombe à l'instant $0{,}8$, au point $(2{,}4\,;0)$, à $2{,}4$ **m** de O.
5. Au départ : $\vec{v}(0)\,(3\,;4)$, vitesse 5. Au sommet : 3. À l'arrivée : $\vec{v}(0{,}8)\,(3\,;-4)$, vitesse 5.
6. $\vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t) = -10(4-10t) = 100t - 40$. Il est négatif pour $t < 0{,}4$ et positif pour $t > 0{,}4$: le mouvement est **retardé sur** $[0\,;0{,}4[$ (montée) et **accéléré sur** $]0{,}4\,;0{,}8]$ (descente).

Exercice 5

1. $\sin(t+2\pi)=\sin t$ et $\sin(2t+4\pi)=\sin 2t$: $M(t+2\pi)=M(t)$, une étude sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi\,;\pi]$, suffit.
2. $M(-t)=(-\sin t\,;-\sin 2t)$: **symétrique de** $M(t)$ **par rapport à** O. $M(\pi-t)=\big(\sin t\,;\sin(2\pi-2t)\big)=(\sin t\,;-\sin 2t)$: **symétrique de** $M(t)$ **par rapport à** (Ox). On trace l'arc pour $t\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$; la symétrie d'axe (Ox) donne l'arc pour $t\in\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$; puis la symétrie de centre O donne l'arc pour $t\in[-\pi\,;0]$. On a ainsi tout $[-\pi\,;\pi]$.
3. $x'(t)=\cos t\geq 0$ et $y'(t)=2\cos 2t$, positif sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[$ et négatif sur $\left]\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	1	$+$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1
$y'(t)$	2	$+$	0	$-$	-2
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4. Tangente **horizontale** en $t=\frac{\pi}{4}$, au point $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;1\right)$ (et, par symétrie, en $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\pm 1\right)$). Tangente **verticale** en $t=\frac{\pi}{2}$, au point $(1\,;0)$ (et en $(-1\,;0)$). En $t=0$: $\vec{v}(0)\,(1\,;2)$, tangente $y=2x$.
5. La courbe a la forme d'un huit couché. $M(0)=M(\pi)=O$. En $t=\pi$: $\vec{v}(\pi)\,(\cos\pi\,;2\cos 2\pi)=(-1\,;2)$, tangente $y=-2x$. Les deux tangentes en O sont symétriques par rapport à (Ox).
6. $y=\sin 2t=2\sin t\cos t$, donc $y^2=4\sin^2 t\left(1-\sin^2 t\right)=4x^2\left(1-x^2\right)$.

Exercice 6

1. $x(t+2\pi) = 2(t+2\pi-\sin t) = x(t)+4\pi$ et $y(t+2\pi) = y(t)$: $M(t+2\pi)$ est l'image de $M(t)$ par la translation de vecteur $4\pi\,\vec{i}$. $x(2\pi-t) = 2(2\pi-t+\sin t) = 4\pi - x(t)$ et $y(2\pi-t) = y(t)$: $M(2\pi-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à la droite $x = 2\pi$. **On étudie sur** $[0\,;\pi]$, puis on complète par symétrie et par translations.
2. $\vec{v}(t)\,\big(2(1-\cos t)\,;2\sin t\big)$. $\|\vec{v}(t)\|^2 = 4\big[(1-\cos t)^2+\sin^2 t\big] = 8(1-\cos t) = 16\sin^2\frac{t}{2}$, donc $\|\vec{v}(t)\| = 4\left|\sin\frac{t}{2}\right|$. Elle est nulle pour $t = 2k\pi$: les **points stationnaires** sont les points $(4k\pi\,;0)$, où le point touche le sol.
3. Sur $[0\,;\pi]$: $x'(t) = 2(1-\cos t) \geq 0$ et $y'(t) = 2\sin t \geq 0$.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	$+$	2	$+$	4
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\pi-2$	$\nearrow$	2π
$y'(t)$	0	$+$	2	$+$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4

Une arche va de $(0\,;0)$ à $(4\pi\,;0)$: **largeur** 4π (le périmètre de la roue), **hauteur** 4 (son diamètre).

4. $M\left(\frac{\pi}{2}\right) = (\pi-2\,;2)$ et $\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right)\,(2\,;2)$: tangente de coefficient directeur 1, $y = x-\pi+4$.
5. $\overrightarrow{MT}\,\big(2\sin t\,;2+2\cos t\big)$. Avec $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$, $1+\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$ et $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$:

$$\overrightarrow{MT} = 4\cos\tfrac{t}{2}\left(\sin\tfrac{t}{2}\,;\cos\tfrac{t}{2}\right), \qquad \vec{v}(t) = 4\sin\tfrac{t}{2}\left(\sin\tfrac{t}{2}\,;\cos\tfrac{t}{2}\right).$$

   Pour $t \in\,]0\,;2\pi[$, $\vec{v}(t) \neq \vec{0}$ et les deux vecteurs sont colinéaires : T **est sur la tangente en** $M(t)$. (Autre méthode : le déterminant $2(1-\cos t)(2+2\cos t) - 2\sin t\times 2\sin t = 4\big(1-\cos^2 t-\sin^2 t\big) = 0$.)
6. $\vec{a}(t)\,(2\sin t\,;2\cos t)$ et $\overrightarrow{MC}\,\big(2t-2t+2\sin t\,;2-2+2\cos t\big) = (2\sin t\,;2\cos t)$: $\vec{a}(t) = \overrightarrow{MC}$, de norme 2. La vitesse $4\left|\sin\frac{t}{2}\right|$ est maximale pour $t = \pi$: au **sommet de l'arche** $(2\pi\,;4)$, où elle vaut 4, le double de la vitesse du centre.

Exercice 7

1. $p = 6$ et le sommet est O : $y^2 = 12x$. Pour $x = 3$, $y^2 = 36$: les points $(3\,;6)$ et $(3\,;-6)$. Leur distance à $F(3\,;0)$ vaut 6, et leur distance à la directrice $x = -3$ vaut $3+3 = 6$.
2. $y = \frac{x^2}{8}$ équivaut à $x^2 = 8y = 2\times 4\times y$: parabole de paramètre $p = 4$, de **foyer** $F(0\,;2)$ et de **directrice** $y = -2$. Pour $M(4\,;2)$ (on a bien $\frac{16}{8} = 2$) : $MF = 4$ et la distance à la directrice vaut $2+2 = 4$.
3. $MF^2 = MH^2$ s'écrit $(x-1)^2+(y-2)^2 = (y+2)^2$, soit $(x-1)^2 = 8y$. Le sommet est le milieu de $[FK]$, avec $K(1\,;-2)$: $S(1\,;0)$.
4. $t = y$, donc $x = \frac{y^2}{4}$: $y^2 = 4x$, parabole de paramètre $p = 2$, de foyer $(1\,;0)$ et de directrice $x = -1$.

Exercice 8

1. $e = \frac{1}{2} < 1$: $\mathcal{C}$ est une **ellipse**. Son axe focal est la perpendiculaire à D passant par F : **l'axe des abscisses**.
2. $K(8\,;0)$. $x_S = \dfrac{1\times 2 + \frac{1}{2}\times 8}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{6}{3/2} = 4$ et $x_{S'} = \dfrac{1\times 2 - \frac{1}{2}\times 8}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{-2}{1/2} = -4$: $S(4\,;0)$ **et** $S'(-4\,;0)$.
3. $MF = 3$ (même abscisse que F) et $MH = |2-8| = 6$: $\frac{MF}{MH} = \frac{1}{2}$, **oui**.
4. $MF^2 = \frac{1}{4}MH^2 \iff (x-2)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x-8)^2 \iff 4x^2 - 16x + 16 + 4y^2 = x^2 - 16x + 64 \iff 3x^2 + 4y^2 = 48$. Pour $y=0$: $x^2 = 16$, $x = \pm 4$, ce sont bien S et S'. (L'équation réduite est $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.)

Exercice 9

1. **a.** En divisant par 225 : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. $a=5$, $b=3$, $c = \sqrt{25-9} = 4$, $e = \dfrac{4}{5}$. **b.** Sommets $(\pm 5\,;0)$ et $(0\,;\pm 3)$; foyers $F(4\,;0)$ et $F'(-4\,;0)$; directrices $x = \pm\dfrac{a^2}{c} = \pm\dfrac{25}{4}$.
2. $\frac{9}{25} + \frac{144}{25\times 9} = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$. $MF = \sqrt{(3-4)^2 + \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{169}{25}} = \frac{13}{5}$ et $MF' = \sqrt{49 + \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{1369}{25}} = \frac{37}{5}$. Somme : $\frac{50}{5} = 10 = 2a$. Et $a - ex = 5 - \frac{4}{5}\times 3 = \frac{13}{5} = MF$.
3. $x = 5\cos t$, $y = 3\sin t$, $t \in [0\,;2\pi[$. Pour M : $\cos t = \frac{3}{5}$ et $\sin t = \frac{4}{5}$.
4. L'affinité orthogonale d'**axe** (Ox) et de **rapport** $\frac{3}{5}$ transforme le cercle de rayon $a=5$ en $\mathcal{E}$ (théorème 8). L'antécédent de M a la même abscisse et l'ordonnée $\frac{5}{3}\times\frac{12}{5} = 4$: c'est $P(3\,;4)$, qui est bien sur le cercle.
5. Ici $a = 2 < b = 3$: le **grand axe est vertical**. $c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$, $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Sommets $(\pm 2\,;0)$ et $(0\,;\pm 3)$; foyers $\left(0\,;\sqrt{5}\right)$ et $\left(0\,;-\sqrt{5}\right)$; directrices $y = \pm\dfrac{9}{\sqrt{5}} = \pm\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$.

Exercice 10

1. Grand axe $2a = 8$ et petit axe $2b = 6$: $a=4$, $b=3$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. $c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$: les piquets sont sur le grand axe, en $F\left(\sqrt{7}\,;0\right)$ et $F'\left(-\sqrt{7}\,;0\right)$, à $\sqrt{7} \approx 2{,}65$ **m** du centre. La corde a la longueur $2a = 8$ **m** (théorème 7).
2. $e = \dfrac{\sqrt{7}}{4} \approx 0{,}66$.
3. $\frac{4}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ donne $y^2 = \frac{27}{4}$, $y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}60$. $MF = a - ex = 4 - \frac{\sqrt{7}}{2} \approx 2{,}68$ et $MF' = 4 + \frac{\sqrt{7}}{2} \approx 5{,}32$; leur somme vaut 8.
4. $P\left(4\cos\frac{\pi}{3}\,;4\sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(2\,;2\sqrt{3}\right)$ et $Q\left(\frac{3}{2}\,;\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. Le point construit est $\left(2\,;\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$: **c'est le rosier** M, point de paramètre $t = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 11

Partie A.

1. $a=4$, $b=3$, $c=\sqrt{16+9}=5$, $e=\frac{5}{4}$. Sommets $(\pm 4\,;0)$, foyers $F(5\,;0)$ et $F'(-5\,;0)$, directrices $x=\pm\frac{16}{5}$, asymptotes $y=\pm\frac{3}{4}x$ (diagonales du rectangle de sommets $(\pm 4\,;\pm 3)$).
2. $\frac{25}{16}-\frac{81}{16\times 9}=\frac{25-9}{16}=1$. $MF=\frac{9}{4}$ (même abscisse que F) et $MF'=\sqrt{100+\frac{81}{16}}=\sqrt{\frac{1681}{16}}=\frac{41}{4}$. $|MF-MF'|=\frac{32}{4}=8=2a$.
3. $\frac{4}{\cos t}=5$ donne $\cos t=\frac{4}{5}$, et $3\tan t=\frac{9}{4}$ donne $\tan t=\frac{3}{4}$ (cohérent : $\sin t=\frac{3}{5}$, $t\in\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$).
4. *Théorème 11 :* $XY=\dfrac{c^2}{4}=\dfrac{25}{4}$.

Partie B. $MF^2=4\,MH^2 \iff (x-4)^2+y^2=4(x-1)^2 \iff x^2-8x+16+y^2=4x^2-8x+4 \iff 3x^2-y^2=12$, soit $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. Avec $K(1\,;0)$: $x_S=\frac{4+2\times 1}{1+2}=2$ et $x_{S'}=\frac{4-2\times 1}{1-2}=-2$: sommets $(\pm 2\,;0)$. Asymptotes : $y=\pm\frac{\sqrt{12}}{2}x=\pm\sqrt{3}\,x$.

Partie C.

1. $X^2-Y^2=\frac{(x+y)^2-(y-x)^2}{2}=\frac{4xy}{2}=2xy$. Donc $xy=8 \iff X^2-Y^2=16 \iff \frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{16}=1$.
2. X et Y sont les coordonnées dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{w})$, $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$, $\vec{w}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)$. C'est une hyperbole avec $a=b=4$: **équilatère**, $c=4\sqrt{2}$, $e=\sqrt{2}$, d'axe focal $y=x$. Sommets : $X=\pm 4$, $Y=0$, soit $\left(2\sqrt{2}\,;2\sqrt{2}\right)$ et $\left(-2\sqrt{2}\,;-2\sqrt{2}\right)$. Foyers : $X=\pm 4\sqrt{2}$, soit $F(4\,;4)$ **et** $F'(-4\,;-4)$.
3. $M(2\,;4)$: $2\times 4=8$. $MF=\sqrt{4+0}=2$ et $MF'=\sqrt{36+64}=10$: $MF'-MF=8=2a$.

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 12

1. $(x-1)^2-1+4(y+2)^2-16+13=0$, soit $(x-1)^2+4(y+2)^2=4$: $\dfrac{(x-1)^2}{4}+(y+2)^2=1$. **Ellipse** de centre $(1\,;-2)$, $a=2$, $b=1$, $c=\sqrt{3}$, $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$, foyers $\left(1\pm\sqrt{3}\,;-2\right)$, sommets $(3\,;-2)$, $(-1\,;-2)$, $(1\,;-1)$, $(1\,;-3)$.
2. $9(x-2)^2-36-16(y+1)^2+16-124=0$, soit $9(x-2)^2-16(y+1)^2=144$: $\dfrac{(x-2)^2}{16}-\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$. **Hyperbole** de centre $(2\,;-1)$, $a=4$, $b=3$, $c=5$, $e=\frac{5}{4}$, sommets $(6\,;-1)$ et $(-2\,;-1)$, foyers $(7\,;-1)$ et $(-3\,;-1)$, asymptotes $y+1=\pm\frac{3}{4}(x-2)$.
3. $(x+3)^2-9-4y+1=0$, soit $(x+3)^2=4(y+2)$. Avec $X=x+3$, $Y=y+2$: $X^2=4Y=2\times 2\times Y$. **Parabole** de sommet $(-3\,;-2)$, de paramètre $p=2$, tournée vers le haut, de **foyer** $(-3\,;-1)$ et de **directrice** $y=-3$.
4. $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\left(\frac{y+1}{3}\right)^2=1$: **ellipse** de centre $(1\,;-1)$, demi-axes 2 (horizontal) et 3 (vertical) : grand axe vertical, $c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$, $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$, foyers $\left(1\,;-1\pm\sqrt{5}\right)$, sommets $(3\,;-1)$, $(-1\,;-1)$, $(1\,;2)$, $(1\,;-4)$.
5. $(x-2)^2-4+(y+3)^2-9+13=0$, soit $(x-2)^2+(y+3)^2=0$: c'est **le seul point** $(2\,;-3)$ (cas particulier : ellipse réduite à un point).

Exercice 13

1. $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{4-3} = 1$, $e = \frac{1}{2}$. Sommets $(\pm 2\,;0)$ et $\left(0\,;\pm\sqrt{3}\right)$, foyers $F(1\,;0)$ et $F'(-1\,;0)$, directrices $D : x = 4$ et $D' : x = -4$.
2. $\frac{1}{4} + \frac{9/4}{3} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$. $M_0F = \frac{3}{2}$ (même abscisse que F) et $M_0F' = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2}$: $M_0F + M_0F' = 4 = 2a$.
3. *Dédoublement :* $\frac{x \times 1}{4} + \frac{y \times \frac{3}{2}}{3} = 1$, soit $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$, c'est-à-dire $x + 2y = 4$. Pour $y = 0$: $x = 4$. Le point $(4\,;0)$ est sur la directrice $D : x = 4$.
4. $2\cos t_0 = 1$ et $\sqrt{3}\sin t_0 = \frac{3}{2}$: $\cos t_0 = \frac{1}{2}$, $\sin t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $t_0 = \frac{\pi}{3}$. $\vec{v}(t)\,\left(-2\sin t\,;\sqrt{3}\cos t\right)$, donc $\vec{v}\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(-\sqrt{3}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, colinéaire à $(-2\,;1)$. Tangente : $1 \times (x-1) + 2\left(y - \frac{3}{2}\right) = 0$, soit $x + 2y = 4$.
5. $P\left(1\,;\sqrt{3}\right)$. La tangente au cercle en P est perpendiculaire à $\overrightarrow{OP}\left(1\,;\sqrt{3}\right)$: $x + \sqrt{3}\,y = 1 + 3 = 4$. Pour $y = 0$: $x = 4$, **le même point** $(4\,;0)$.
6. **a.** $\vec{v}(t)\,\left(-2\sin t\,;\sqrt{3}\cos t\right)$ et $\vec{a}(t)\,\left(-2\cos t\,;-\sqrt{3}\sin t\right) = -\overrightarrow{OM}(t)$. **b.** $\|\vec{v}(t)\|^2 = 4\sin^2 t + 3\cos^2 t = 3 + \sin^2 t$. Maximale ($= 4$, vitesse 2) quand $\sin^2 t = 1$: aux points $\left(0\,;\pm\sqrt{3}\right)$, extrémités du petit axe. Minimale ($= 3$, vitesse $\sqrt{3}$) quand $\sin t = 0$: aux points $(\pm 2\,;0)$, extrémités du grand axe. **c.** $\vec{v} \cdot \vec{a} = 4\sin t\cos t - 3\sin t\cos t = \sin t\cos t$, strictement positif sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$: le mouvement y est **accéléré** (le point va du sommet $(2\,;0)$ vers le sommet $\left(0\,;\sqrt{3}\right)$ en accélérant).

SenAcad, une solution de BarroTech