Géométrie dans l'espace : exercices

TERMINALE S1-S3 · CHAPITRE 12 · EXERCICES D'APPLICATION

Séries S1, S3 et S1A. Exercices classés par leçon, du plus simple au plus complet ; l'exercice 13 est un exercice d'approfondissement. Sauf mention contraire, l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Dans tous les exercices, $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1 : $ABCD$ est la face du bas, E, F, G, H sont au-dessus de A, B, C, D, et on utilise le repère orthonormé direct $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. Les corrigés détaillés sont dans la fiche « Corrigés ».

Leçon 1 : orientation de l'espace et produit vectoriel

Exercice 1 : bases directes et définition du produit vectoriel

1. Dans le cube, dire si chacune des bases suivantes est directe ou indirecte, en justifiant :
   a. $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})$; b. $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB})$; c. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{EA})$; d. $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})$.
2. En utilisant uniquement la définition du produit vectoriel, calculer :
   a. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$; b. $\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB}$; c. $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AB}$; d. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}$.
3. a. Calculer AC et la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$. En déduire $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.
   b. Justifier que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AE}$, puis que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}$. *(On admet que la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$ est directe.)*
4. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=5$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=6$. Calculer le cosinus, puis le sinus de leur angle géométrique θ, et en déduire $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$.

Sen'Acad, une solution de BacTech

Leçon 2 : propriétés et expression analytique du produit vectoriel

Exercice 2 : calculs de produits vectoriels

On donne $\vec{u}\,(2\,;-1\,;3)$, $\vec{v}\,(1\,;4\,;-2)$ et $\vec{w}\,(-4\,;2\,;-6)$.

1. Calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$, puis vérifier que ce vecteur est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
2. Sans calcul, donner $\vec{v}\wedge\vec{u}$.
3. Calculer $\vec{u}\wedge\vec{w}$. Que peut-on dire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$?
4. Déterminer le réel m pour lequel les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{t}\,(m\,;-2\,;6)$ sont colinéaires.
5. Calculer $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{v}$ et $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{v})$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3 : alignement et identité de Lagrange

1. On donne $A(1\,;2\,;-1)$, $B(3\,;1\,;0)$, $C(7\,;-1\,;2)$ et $D(5\,;0\,;2)$.
   a. Les points A, B, C sont-ils alignés ? Et les points A, B, D ?
   b. Déterminer les réels a et b pour lesquels le point $E(a\,;b\,;1)$ appartient à la droite (AB).
2. a. À l'aide de la définition du produit vectoriel, montrer que, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls,
   $$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2.$$
   b. Vérifier cette égalité avec les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'exercice 2.
   c. On sait que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=6$. Calculer $|\vec{u}\cdot\vec{v}|$, puis les mesures possibles de l'angle géométrique de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Leçon 3 : aires, vecteur normal et équation d'un plan

Exercice 4 : aire d'un triangle et équation de son plan

On donne $A(1\,;-1\,;2)$, $B(3\,;0\,;1)$ et $C(2\,;1\,;4)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. En déduire que A, B, C ne sont pas alignés.
2. Calculer l'aire du triangle ABC.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
4. Calculer la distance du point O au plan (ABC), puis le volume du tétraèdre $OABC$ (on rappelle : $V=\frac{1}{3}\times\text{aire de la base}\times\text{hauteur}$).

SanAcad, une solution de BarroTech

Exercice 5 : parallélogramme, plans et intersection

1. On donne $A(1\,;0\,;1)$, $B(2\,;2\,;0)$ et $D(0\,;1\,;3)$.
   a. Déterminer les coordonnées du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
   b. Calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$.
   c. Déterminer une équation du plan (ABD), et vérifier que C appartient à ce plan.
2. Déterminer une équation du plan passant par $E(1\,;1\,;1)$ et dirigé par $\vec{u}\,(1\,;0\,;2)$ et $\vec{v}\,(0\,;1\,;-1)$.
3. On considère les plans $(P)\,:\,x+y-z-1=0$ et $(Q)\,:\,2x-y+z-2=0$.
   a. Montrer que (P) et (Q) sont sécants, et donner un vecteur directeur de leur droite d'intersection Δ à l'aide d'un produit vectoriel.
   b. Vérifier que le point $(1\,;0\,;0)$ appartient aux deux plans, puis donner une représentation paramétrique de Δ.

Leçon 4 : produit mixte, coplanarité et volumes

Exercice 6 : produit mixte et coplanarité

On donne $\vec{u}\,(1\,;-1\,;2)$, $\vec{v}\,(2\,;1\,;0)$ et $\vec{w}\,(0\,;3\,;1)$.

1. Calculer $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$. En déduire, sans nouveau calcul, $[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]$, $[\vec{w},\vec{v},\vec{u}]$ et $[\vec{u},\vec{w},\vec{v}]$.
2. La base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est-elle directe ? Quel est le volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$?
3. Pour quelle valeur du réel m les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}_m\,(m\,;1\,;m)$ sont-ils coplanaires ? Pour cette valeur, écrire $\vec{w}_m$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
4. On donne $A(1\,;0\,;2)$, $B(2\,;-1\,;4)$, $C(3\,;1\,;2)$ et $D(1\,;3\,;3)$.
   a. Vérifier que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$. Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ?
   b. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.
   c. Déterminer le réel z pour lequel le point $F(0\,;1\,;z)$ appartient au plan (ABC).

Exercice 7 : volumes et hauteurs

On donne $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$, $C(0\,;0\,;3)$ et $D(2\,;2\,;2)$.

1. Calculer $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]$, puis le volume du tétraèdre $ABCD$.
2. Calculer l'aire du triangle ABC. En déduire la distance du point D au plan (ABC).
3. Retrouver cette distance avec la formule de Première, sachant que $(ABC)\,:\,6x+3y+2z-6=0$.
4. Quel est le volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$?
5. Déterminer les points M de l'axe (Oz) tels que le tétraèdre $ABCM$ ait pour volume 1.

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 5 : distances

Exercice 8 : distance d'un point à une droite

1. La droite (D) passe par $A(1\,;2\,;0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;-1\,;2)$. On donne $M(1\,;5\,;6)$.
   a. Calculer $\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}$, puis la distance du point M à la droite (D).
   b. Retrouver ce résultat en déterminant le projeté orthogonal H de M sur (D).
   c. Quelle est la distance de la droite (D) à la droite (D') passant par M et parallèle à (D) ?
2. Dans le cube, calculer la distance du sommet B à la grande diagonale (AG).

Exercice 9 : distance de deux droites

La droite (D_1) passe par $A(1\,;0\,;0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;1\,;0)$; la droite (D_2) passe par $B(3\,;1\,;2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}\,(0\,;1\,;1)$.

1. Calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$. Les droites sont-elles parallèles ?
2. Calculer $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]$ et la distance des droites (D_1) et (D_2). Sont-elles coplanaires ?
3. **Perpendiculaire commune.** Un point M de (D_1) s'écrit $M(1+t\,;t\,;0)$ et un point N de (D_2) s'écrit $N(3\,;1+s\,;2+s)$. Déterminer t et s pour que (MN) soit orthogonale à (D_1) et à (D_2). Calculer alors MN et comparer avec la question 2.
4. La droite (D_3) passe par $C(0\,;2\,;1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}$. Calculer la distance des droites (D_1) et (D_3).
5. La droite (D_4) passe par B et a pour vecteur directeur $\vec{w}\,(1\,;0\,;2)$. Montrer que (D_1) et (D_4) sont sécantes, et déterminer leur point d'intersection.

Leçon 6 : translations, homothéties et réflexions

Exercice 10 : images de points, de plans et de sphères

1. Soit t la translation de vecteur $\vec{u}\,(2\,;1\,;-1)$.
   a. Déterminer l'image M' de $M(0\,;3\,;1)$.
   b. Déterminer une équation de l'image du plan (P) : $2x-y+z-4=0$.
   c. Quelle est l'image de la sphère de centre $A(1\,;1\,;1)$ et de rayon 2 ?
2. Soit h l'homothétie de centre $\Omega(2\,;0\,;1)$ et de rapport 3.
   a. Donner l'expression analytique de h.
   b. Déterminer l'image du point $A(1\,;1\,;1)$, puis celle de la sphère de centre A et de rayon 2.
   c. Déterminer le point N dont l'image par h est $N'(5\,;6\,;4)$.
3. Soit s la réflexion de plan (R) : $2x-y+2z-3=0$.
   a. Déterminer le projeté orthogonal H du point $M(3\,;0\,;3)$ sur (R), puis l'image M' de M par s.
   b. Vérifier que le point $A(0\,;-3\,;0)$ est invariant par s.
   c. En déduire, sans calcul, que $M'A=MA$. Vérifier en calculant ces deux distances.

SenAcad, une solution de Barrotech

Leçon 7 : rotations autour d'un axe et demi-tours

Exercice 11 : rotations et demi-tours

1. Soit r la rotation d'axe (Oz), orienté par $\vec{k}$, et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   a. Donner l'expression analytique de r.
   b. Déterminer les images des points $M(2\,;0\,;3)$ et $N(1\,;\sqrt{3}\,;0)$. Vérifier que $ON' = ON$.
   c. Quel est l'ensemble des images du point M par toutes les rotations d'axe (Oz) ?
2. Dans le cube, soit Δ l'axe passant par les centres des faces $ABCD$ et $EFGH$, orienté par $\overrightarrow{AE}$.
   a. Déterminer les images des huit sommets par la rotation d'axe Δ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Que peut-on dire du cube ?
   b. Même question avec le demi-tour d'axe Δ.
3. La droite (D) passe par $A(0\,;1\,;0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;0\,;1)$. Déterminer le projeté orthogonal H du point $M(2\,;1\,;0)$ sur (D), puis l'image M' de M par le demi-tour d'axe (D).
4. Soit σ_1 et σ_2 les demi-tours d'axes (Ox) et (Oy). Donner l'expression analytique de $\sigma_2 \circ \sigma_1$ et reconnaître cette transformation.

Leçon 8 : composée de deux réflexions

Exercice 12 : composer et décomposer

SenAcad, une solution de BarroTech

1. Soit $(P) : x = 1$ et $(P') : x = -2$.
   a. Reconnaître $s_{P'} \circ s_P$, et contrôler avec l'image du point O.
   b. Reconnaître $s_P \circ s_{P'}$.
2. Soit (P) le plan (xOz), d'équation $y = 0$, et (P') le plan d'équation $x + y = 0$.
   a. Donner l'expression analytique de s_P, puis vérifier que $s_{P'}$ envoie $(x\,;y\,;z)$ sur $(-y\,;-x\,;z)$.
   b. En déduire l'expression analytique de $f = s_{P'} \circ s_P$, et reconnaître f (l'axe (Oz) est orienté par $\vec{k}$).
   c. Déterminer l'ensemble des points invariants de f.
3. Écrire le demi-tour d'axe (Ox) comme composée de deux réflexions dont on précisera les plans.
4. Écrire la translation de vecteur $2\vec{i}$ comme composée de deux réflexions, la première étant la réflexion de plan (yOz).

Approfondissement

Exercice 13 : le cube, le plan (BDE) et une rotation d'un tiers de tour

On travaille dans le cube, avec le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1. a. Calculer $\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{BE}$. Que remarque-t-on ?
   b. En déduire une équation du plan (BDE) et l'aire du triangle BDE. Quelle est la nature de ce triangle ?
2. a. Calculer le volume du tétraèdre $ABDE$.
   b. En déduire la distance du point A au plan (BDE), et la retrouver avec la formule de Première.
3. Déterminer le point K d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE). Vérifier que K est le centre de gravité du triangle BDE.
4. Soit f l'application qui, au point $M(x\,;y\,;z)$, associe le point $M'(z\,;x\,;y)$.
   a. Déterminer les images de A, B, D, E et G par f.
   b. Montrer que f conserve les distances, et que tout point de la droite (AG) est invariant par f.
   c. Montrer que $f\circ f\circ f$ est l'identité.
5. On admet que f est une rotation d'axe (AG), orienté par $\overrightarrow{AG}$.
   a. Calculer $\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{KD}$ et KB. En déduire l'angle géométrique des vecteurs $\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{KD}$.
   b. Calculer $\overrightarrow{KB}\wedge\overrightarrow{KD}$, et en déduire que l'angle de f est $\frac{2\pi}{3}$.
6. Soit (P_1) : $y-z=0$ et (P_2) : $x-y=0$.
   a. Vérifier que (P_1) contient A, G et B, et que (P_2) contient A, G et E.
   b. Montrer que $f=s_{P_2}\circ s_{P_1}$. Quel est l'angle géométrique des deux plans ? Est-ce cohérent avec la question 5 ?

SenAcad, une solution de BarroTech