Géométrie dans l'espace : corrigés

TERMINALE S1-S3 · CHAPITRE 12 · CORRIGÉS DÉTAILLÉS

Séries S1, S3 et S1A. Corrigés détaillés des exercices d'application. Tous les résultats ont été vérifiés par calcul exact, et recoupés par un calcul numérique indépendant. Dans le cube, $A(0\,;0\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$, $C(1\,;1\,;0)$, $D(0\,;1\,;0)$, $E(0\,;0\,;1)$, $F(1\,;0\,;1)$, $G(1\,;1\,;1)$ et $H(0\,;1\,;1)$.

Leçon 1 : orientation de l'espace et produit vectoriel

Exercice 1

Notons $\vec{i}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{j}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{k}=\overrightarrow{AE}$: la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est directe.

1. a. $(\vec{j},\vec{i},\vec{k})$: on a échangé les deux premiers vecteurs, la base est **indirecte**.
   b. $(\vec{j},\vec{k},\vec{i})$: c'est une permutation circulaire de $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, la base est **directe**.
   c. $(\vec{i},\vec{j},-\vec{k})$: on a remplacé $\vec{k}$ par son opposé, la base est **indirecte**.
   d. $(\vec{k},\vec{j},\vec{i})$: on a échangé $\vec{i}$ et $\vec{k}$, la base est **indirecte**.
2. a. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux et de norme 1 : leur produit vectoriel est orthogonal à la face $ABCD$, donc colinéaire à $\overrightarrow{AE}$, de norme $1\times 1\times\sin\frac{\pi}{2}=1$, et la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD})$ est directe. Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}$.
   b. Par antisymétrie, $\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EA}$.
   c. De même, $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AD}$, de norme 1, et $(\vec{k},\vec{i},\vec{j})$ est directe : $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$.
   d. $\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AB}$: les deux vecteurs sont colinéaires, donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HG}=\vec{0}$.
3. a. AC est la diagonale d'un carré de côté 1 : $AC=\sqrt{2}$, et $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{4}$. Donc
$$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=1\times\sqrt{2}\times\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1.$$
   b. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, donc au plan (ABC) de la face du bas : il est colinéaire à $\overrightarrow{AE}$. Il a la même norme que $\overrightarrow{AE}$, et la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$ est directe : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}$.
4. $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$. Comme $\theta\in[0\,;\pi]$, $\sin\theta\geq 0$, donc $\sin\theta=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\dfrac{4}{5}$. Ainsi $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=2\times 5\times\dfrac{4}{5}=8$.

Leçon 2 : propriétés et expression analytique du produit vectoriel

Exercice 2

1. Avec la méthode « cacher une ligne » :
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \big((-1)(-2) - 3 \times 4\,;\ 3 \times 1 - 2 \times (-2)\,;\ 2 \times 4 - (-1) \times 1\big) = (-10\,;7\,;9).$$
Contrôle : $(-10\,;7\,;9) \cdot (2\,;-1\,;3) = -20 - 7 + 27 = 0$ et $(-10\,;7\,;9) \cdot (1\,;4\,;-2) = -10 + 28 - 18 = 0$.
2. Par antisymétrie, $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\,\vec{u} \wedge \vec{v} = (10\,;-7\,;-9)$.
3. $\vec{u} \wedge \vec{w} = \big((-1)(-6) - 3 \times 2\,;\ 3 \times (-4) - 2 \times (-6)\,;\ 2 \times 2 - (-1)(-4)\big) = (0\,;0\,;0)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont **colinéaires** : en effet $\vec{w} = -2\,\vec{u}$.
4. $\vec{u} \wedge \vec{t} = \big((-1) \times 6 - 3 \times (-2)\,;\ 3m - 2 \times 6\,;\ 2 \times (-2) - (-1)m\big) = (0\,;3m - 12\,;m - 4)$. Ce vecteur est nul si, et seulement si, $m = 4$. Alors $\vec{t}\,(4\,;-2\,;6) = 2\,\vec{u}$.
5. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} = (-10\,;7\,;9) \wedge (1\,;4\,;-2) = \big(7 \times (-2) - 9 \times 4\,;\ 9 \times 1 - (-10)(-2)\,;\ (-10) \times 4 - 7 \times 1\big) = (-50\,;-11\,;-47)$.
Mais $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, donc $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$. Les deux résultats sont différents : **le produit vectoriel n'est pas associatif**, les parenthèses sont indispensables.

Exercice 3

1. a. $\overrightarrow{AB}\,(2\,;-1\,;1)$, $\overrightarrow{AC}\,(6\,;-3\,;3)$, $\overrightarrow{AD}\,(4\,;-2\,;3)$.
   - $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \big((-1) \times 3 - 1 \times (-3)\,;\ 1 \times 6 - 2 \times 3\,;\ 2 \times (-3) - (-1) \times 6\big) = (0\,;0\,;0)$: A, B, C sont **alignés** ($\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AB}$).
   - $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \big((-1) \times 3 - 1 \times (-2)\,;\ 1 \times 4 - 2 \times 3\,;\ 2 \times (-2) - (-1) \times 4\big) = (-1\,;-2\,;0) \neq \vec{0}$: A, B, D ne sont **pas alignés**.

   b. $\overrightarrow{AE}\,(a - 1\,;b - 2\,;2)$ et

   $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE} = \big((-1) \times 2 - 1 \times (b - 2)\,;\ 1 \times (a - 1) - 2 \times 2\,;\ 2(b - 2) + (a - 1)\big) = (-b\,;a - 5\,;a + 2b - 5)$.

   $E \in (AB)$ si, et seulement si, ce vecteur est nul : $b = 0$ et $a = 5$ (la troisième coordonnée est alors nulle). Donc $E(5\,;0\,;1)$; en effet $\overrightarrow{AE}\,(4\,;-2\,;2) = 2\,\overrightarrow{AB}$.
2. a. Soit θ l'angle géométrique de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Par définition, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \sin\theta$, et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta$. Donc
$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2.$$
   b. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = 100 + 49 + 81 = 230$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 4 - 6 = -8$, donc $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = 64$; $\|\vec{u}\|^2 = 14$ et $\|\vec{v}\|^2 = 21$. On a bien $230 + 64 = 294 = 14 \times 21$.
   c. $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = 9 \times 16 - 36 = 108$, donc $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$. Et $\sin\theta = \dfrac{6}{3 \times 4} = \dfrac{1}{2}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ ou $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ (selon le signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$).

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 3 : aires, vecteur normal et équation d'un plan

Exercice 4

1. $\overrightarrow{AB}\,(2\,;1\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(1\,;2\,;2)$:
$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\big(1\times 2-(-1)\times 2\,;\;(-1)\times 1-2\times 2\,;\;2\times 2-1\times 1\big)=(4\,;-5\,;3).$$
Ce vecteur n'est pas nul, donc A, B, C ne sont pas alignés.
2. $\big\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\big\|=\sqrt{16+25+9}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$. L'aire du triangle ABC est $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\approx 3{,}54$.
3. $\vec{n}\,(4\,;-5\,;3)$ est normal au plan : $(ABC) : 4x-5y+3z+d=0$. Avec A : $4+5+6+d=0$, donc $d=-15$:
$$(ABC) : 4x-5y+3z-15=0.$$
Contrôle : B donne $12-0+3-15=0$ et C donne $8-5+12-15=0$.
4. $d(O,(ABC))=\dfrac{|-15|}{\sqrt{50}}=\dfrac{15}{5\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Le volume du tétraèdre $OABC$ est
$$V=\frac{1}{3}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{15\times 2}{12}=\frac{5}{2}.$$
Contrôle avec la leçon 4 : $[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]=15$, et $\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$.

Exercice 5

1. a. $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, soit $C=B+\overrightarrow{AD}$. Comme $\overrightarrow{AD}\,(-1\,;1\,;2)$, on obtient $C(1\,;3\,;2)$.
b. $\overrightarrow{AB}\,(1\,;2\,;-1)$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=\big(2\times 2-(-1)\times 1\,;\;(-1)(-1)-1\times 2\,;\;1\times 1-2\times(-1)\big)=(5\,;-1\,;3)$. L'aire du parallélogramme est $\sqrt{25+1+9}=\sqrt{35}\approx 5{,}92$.
c. $(ABD) : 5x-y+3z+d=0$, et A donne $5+3+d=0$: $(ABD) : 5x-y+3z-8=0$. Pour C : $5-3+6-8=0$, donc C appartient au plan (c'est normal, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$).
2. Un vecteur normal est $\vec{u}\wedge\vec{v}=\big(0\times(-1)-2\times 1\,;\;2\times 0-1\times(-1)\,;\;1\times 1-0\times 0\big)=(-2\,;1\,;1)$. Le plan a une équation $-2x+y+z+d=0$, et E donne $-2+1+1+d=0$, soit $d=0$. Le plan a pour équation $-2x+y+z=0$, ou $2x-y-z=0$.
3. a. $\vec{n}\,(1\,;1\,;-1)$ et $\vec{n}'\,(2\,;-1\,;1)$ ne sont pas colinéaires, donc les plans sont sécants. La droite Δ est dirigée par
$$\vec{n}\wedge\vec{n}'=\big(1\times 1-(-1)(-1)\,;\;(-1)\times 2-1\times 1\,;\;1\times(-1)-1\times 2\big)=(0\,;-3\,;-3),$$
ou plus simplement par $(0\,;1\,;1)$.
b. $1+0-0-1=0$ et $2-0+0-2=0$: le point $(1\,;0\,;0)$ est dans les deux plans. Donc Δ : $x=1$, $y=t$, $z=t$, $t\in\mathbb{R}$. *Contrôle : $1+t-t-1=0$ et $2-t+t-2=0$ pour tout t.*

Leçon 4 : produit mixte, coplanarité et volumes

Exercice 6

1. $\vec{u}\wedge\vec{v}=\big((-1)\times 0-2\times 1\,;\;2\times 2-1\times 0\,;\;1\times 1-(-1)\times 2\big)=(-2\,;4\,;3)$, donc
$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=(-2)\times 0+4\times 3+3\times 1=15.$$
Par permutation circulaire, $[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]=15$. En échangeant deux vecteurs, le signe change : $[\vec{w},\vec{v},\vec{u}]=-15$ (échange de $\vec{u}$ et $\vec{w}$) et $[\vec{u},\vec{w},\vec{v}]=-15$ (échange de $\vec{v}$ et $\vec{w}$).
2. $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=15>0$: la base est **directe**. Le parallélépipède a pour volume $|15|=15$.
3. $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_m]=(-2\,;4\,;3)\cdot(m\,;1\,;m)=-2m+4+3m=m+4$. Les trois vecteurs sont coplanaires si, et seulement si, $m=-4$. Alors $\vec{w}_{-4}\,(-4\,;1\,;-4)$, et on cherche a, b tels que $a\,\vec{u}+b\,\vec{v}=(a+2b\,;-a+b\,;2a)=(-4\,;1\,;-4)$: $a=-2$, puis $b=-1$, et la première coordonnée est bien $-2-2=-4$. Donc $\vec{w}_{-4}=-2\,\vec{u}-\vec{v}$.
4. a. $\overrightarrow{AB}\,(1\,;-1\,;2)=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}\,(2\,;1\,;0)=\vec{v}$, $\overrightarrow{AD}\,(0\,;3\,;1)=\vec{w}$. Comme $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=15\neq 0$, les points A, B, C, D **ne sont pas coplanaires**.
b. $V(ABCD)=\dfrac{15}{6}=\dfrac{5}{2}$.
c. $\overrightarrow{AF}\,(-1\,;1\,;z-2)$ et $\big[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF}\big]=(-2\,;4\,;3)\cdot(-1\,;1\,;z-2)=2+4+3z-6=3z$. F est dans (ABC) si, et seulement si, $z=0$: $F(0\,;1\,;0)$. *Contrôle : $(ABC):-2x+4y+3z-4=0$, et F donne $0+4+0-4=0$.*

Exercice 7

1. $\overrightarrow{AB}\,(-1\,;2\,;0)$, $\overrightarrow{AC}\,(-1\,;0\,;3)$, $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(6\,;3\,;2)$ (cours, exemple 9) et $\overrightarrow{AD}\,(1\,;2\,;2)$:
$$\big[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\big]=6+6+4=16,\qquad V(ABCD)=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}.$$
2. $\mathcal{A}(ABC)=\dfrac{1}{2}\sqrt{36+9+4}=\dfrac{7}{2}$. La hauteur issue de D vaut $h=\dfrac{3V}{\mathcal{A}}=\dfrac{8}{7/2}=\dfrac{16}{7}$.
3. $d(D,(ABC))=\dfrac{|6\times 2+3\times 2+2\times 2-6|}{\sqrt{49}}=\dfrac{16}{7}$: on retrouve la même valeur.
4. Le parallélépipède a pour volume $|16|=16$ (six fois celui du tétraèdre).
5. $M(0\,;0\,;t)$, $\overrightarrow{AM}\,(-1\,;0\,;t)$ et $\big[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM}\big]=-6+0+2t=2t-6$. Le volume vaut $\dfrac{|2t-6|}{6}$, et il est égal à 1 si, et seulement si, $2t-6=6$ ou $2t-6=-6$: $t=6$ ou $t=0$. Les points cherchés sont $O(0\,;0\,;0)$ et $M(0\,;0\,;6)$.

Leçon 5 : distances

Exercice 8

1. a. $\overrightarrow{AM}\,(0\,;3\,;6)$ et
$$\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=\big(3\times2-6\times(-1)\,;\;6\times2-0\times2\,;\;0\times(-1)-3\times2\big)=(12\,;12\,;-6),$$
de norme $\sqrt{144+144+36}=\sqrt{324}=18$. Comme $\|\vec{u}\|=\sqrt{4+1+4}=3$, $d(M,(D))=\dfrac{18}{3}=6$.
b. $H=A+t\,\vec{u}$ avec $t=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}=\dfrac{0-3+12}{9}=1$, donc $H(3\,;1\,;2)$. Alors $\overrightarrow{HM}\,(-2\,;4\,;4)$, $\overrightarrow{HM}\cdot\vec{u}=-4-4+8=0$, et $HM=\sqrt{4+16+16}=6$.
c. Les droites (D) et (D') sont parallèles : leur distance est celle d'un point de (D') à (D), par exemple M. Elle vaut 6.
2. (AG) passe par A, de vecteur directeur $\overrightarrow{AG}\,(1\,;1\,;1)$, et $\overrightarrow{AB}\,(1\,;0\,;0)$. Alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AG}=(0\times1-0\times1\,;\;0\times1-1\times1\,;\;1\times1-0\times1)=(0\,;-1\,;1)$, de norme $\sqrt{2}$, et
$$d(B,(AG))=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\approx0{,}82.$$

Exercice 9

1. $\vec{u}\wedge\vec{v}=(1\times1-0\times1\,;\;0\times0-1\times1\,;\;1\times1-1\times0)=(1\,;-1\,;1)\neq\vec{0}$: les droites **ne sont pas parallèles**.
2. $\overrightarrow{AB}\,(2\,;1\,;2)$, donc $\big[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\big]=(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\overrightarrow{AB}=2-1+2=3$. Et
$$d\big((D_1),(D_2)\big)=\frac{|3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\approx1{,}73.$$
Comme ce produit mixte n'est pas nul, les droites **ne sont pas coplanaires**.
3. $\overrightarrow{MN}\,(2-t\,;1+s-t\,;2+s)$.
   - $\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}=(2-t)+(1+s-t)=3+s-2t=0$;
   - $\overrightarrow{MN}\cdot\vec{v}=(1+s-t)+(2+s)=3+2s-t=0$.

   La seconde équation donne $t=3+2s$; dans la première, $3+s-6-4s=0$, soit $s=-1$, puis $t=1$. Donc $M_0(2\,;1\,;0)$, $N_0(3\,;0\,;1)$, $\overrightarrow{M_0N_0}\,(1\,;-1\,;1)$ et $M_0N_0=\sqrt{3}$: c'est bien la distance trouvée à la question 2. On remarque que $\overrightarrow{M_0N_0}=\vec{u}\wedge\vec{v}$.
4. (D_1) et (D_3) sont parallèles. $\overrightarrow{AC}\,(-1\,;2\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}\wedge\vec{u}=(2\times0-1\times1\,;\;1\times1-(-1)\times0\,;\;(-1)\times1-2\times1)=(-1\,;1\,;-3)$, de norme $\sqrt{11}$. Comme $\|\vec{u}\|=\sqrt{2}$:
$$d\big((D_1),(D_3)\big)=d(C,(D_1))=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{22}}{2}\approx2{,}35.$$
5. $\vec{u}\wedge\vec{w}=(1\times2-0\times0\,;\;0\times1-1\times2\,;\;1\times0-1\times1)=(2\,;-2\,;-1)\neq\vec{0}$: les droites ne sont pas parallèles. Et $\big[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{w}\big]=(2\,;-2\,;-1)\cdot(2\,;1\,;2)=4-2-2=0$: elles sont coplanaires, donc **sécantes**. Un point de (D_4) s'écrit $(3+s\,;1\,;2+2s)$; il est sur (D_1), d'équations $x=1+t$, $y=t$, $z=0$, si $2+2s=0$ et $t=1$, soit $s=-1$: le point $(2\,;1\,;0)$, qui correspond bien à $t=1$ sur (D_1). Le point d'intersection est $(2\,;1\,;0)$.

Leçon 6 : translations, homothéties et réflexions

Exercice 10

1. a. $M'(0+2\,;3+1\,;1-1)=(2\,;4\,;0)$.
   b. $M'(x'\,;y'\,;z')$ est dans l'image de (P) si, et seulement si, $M(x'-2\,;y'-1\,;z'+1)$ est dans (P) : $2(x'-2)-(y'-1)+(z'+1)-4=0$, soit $2x'-y'+z'-6=0$. L'image est le plan (P') : $2x-y+z-6=0$, parallèle à (P). *Contrôle :* $(2\,;0\,;0)$ *est dans* (P) *et son image* $(4\,;1\,;-1)$ *vérifie* $8-1-1-6=0$.
   c. C'est la sphère de centre $t(A)=(3\,;2\,;0)$ et de rayon 2.
2. a. $x'=2+3(x-2)=3x-4$, $y'=3y$, $z'=1+3(z-1)=3z-2$.
   b. $h(A)=(3-4\,;3\,;3-2)=(-1\,;3\,;1)$. L'image de la sphère est la sphère de centre $(-1\,;3\,;1)$ et de rayon $3\times 2=6$.
   c. $3x-4=5$, $3y=6$, $3z-2=4$ donnent $N(3\,;2\,;2)$.
3. a. Un vecteur normal à (R) est $\vec{n}\,(2\,;-1\,;2)$. La droite passant par M et dirigée par $\vec{n}$ est formée des points $(3+2t\,;-t\,;3+2t)$; elle coupe (R) quand $2(3+2t)+t+2(3+2t)-3=9+9t=0$, soit $t=-1$: $H(1\,;1\,;1)$. Comme H est le milieu de $[MM']$, $M'(2\times 1-3\,;2\times 1-0\,;2\times 1-3)=(-1\,;2\,;-1)$.
   b. $2\times 0-(-3)+2\times 0-3=0$: A est dans (R), donc $s(A)=A$.
   c. s conserve les distances, $s(M)=M'$ et $s(A)=A$, donc $M'A=MA$. Vérification : $\overrightarrow{MA}\,(-3\,;-3\,;-3)$, $MA=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$; $\overrightarrow{M'A}\,(1\,;-5\,;1)$, $M'A=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 7 : rotations autour d'un axe et demi-tours

Exercice 11

1. a. $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$: $x'=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y$, $y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y$, $z'=z$.
   b. $r(M)=\left(1\,;\sqrt{3}\,;3\right)$. Pour N : $x'=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$ et $y'=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$, donc $r(N)=(-1\,;\sqrt{3}\,;0)$. On a $ON=\sqrt{1+3}=2$ et $ON'=\sqrt{1+3}=2$.
   c. C'est le cercle du plan d'équation $z=3$, de centre $(0\,;0\,;3)$ et de rayon 2.
2. a. Dans le plan de la face $ABCD$, la rotation induite a pour centre le centre de la face et pour angle $\frac{\pi}{2}$, dans le sens de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{AD}$ (base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ directe). Elle envoie $A\mapsto B$, $B\mapsto C$, $C\mapsto D$, $D\mapsto A$. De même, dans le plan de la face du haut : $E\mapsto F$, $F\mapsto G$, $G\mapsto H$, $H\mapsto E$. *Contrôle : avec $\Omega(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0)$, $\overrightarrow{\Omega A}\,(-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\,;0)$ tourne en $(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\,;0)=\overrightarrow{\Omega B}$.* Les huit sommets sont envoyés sur les huit sommets : le cube est **globalement invariant**.
   b. Le demi-tour d'axe Δ échange A et C, B et D, E et G, F et H. Le cube est encore globalement invariant.
3. $\overrightarrow{AM}\,(2\,;0\,;0)$ et $t=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}=\dfrac{2}{2}=1$: $H(1\,;1\,;1)$. H est le milieu de $[MM']$, donc $M'(0\,;1\,;2)$. *Contrôle : $\overrightarrow{MM'}\,(-2\,;0\,;2)$ est orthogonal à $\vec{u}$, et $HM=HM'=\sqrt{2}$.*
4. $\sigma_1(x\,;y\,;z)=(x\,;-y\,;-z)$, puis $\sigma_2(x\,;-y\,;-z)=(-x\,;-y\,;z)$. Donc $\sigma_2\circ\sigma_1$ envoie $(x\,;y\,;z)$ sur $(-x\,;-y\,;z)$: c'est le **demi-tour d'axe** (Oz).

StanAcad, une solution de BarroTech

Leçon 8 : composée de deux réflexions

Exercice 12

1. a. Les plans sont parallèles, orthogonaux à $\vec{i}$. Avec $H(1\,;0\,;0)$ dans (P) et $H'(-2\,;0\,;0)$ dans (P'), $\overrightarrow{HH'}=-3\vec{i}$: $s_{P'}\circ s_P$ est la **translation de vecteur** $-6\vec{i}$. Contrôle : $s_P(O)=(2\,;0\,;0)$, puis $s_{P'}(2\,;0\,;0)=(-4-2\,;0\,;0)=(-6\,;0\,;0)$.
   b. $s_P\circ s_{P'}$ est la translation de vecteur $6\vec{i}$.
2. a. $s_P(x\,;y\,;z)=(x\,;-y\,;z)$. Pour $s_{P'}$: $\vec{n}\,(1\,;1\,;0)$ est normal à (P') ; le projeté de $M(x\,;y\,;z)$ sur (P') est $H=M+\lambda\vec{n}$ avec $(x+\lambda)+(y+\lambda)=0$, soit $\lambda=-\frac{x+y}{2}$. Alors $M'=M+2\lambda\vec{n}=(x-(x+y)\,;y-(x+y)\,;z)=(-y\,;-x\,;z)$.
   b. $f(x\,;y\,;z)=s_{P'}(x\,;-y\,;z)=(y\,;-x\,;z)$. Or la rotation d'axe (Oz) et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ envoie $(x\,;y\,;z)$ sur $\left(x\cos(-\frac{\pi}{2})-y\sin(-\frac{\pi}{2})\,;\ x\sin(-\frac{\pi}{2})+y\cos(-\frac{\pi}{2})\,;\ z\right)=(y\,;-x\,;z)$. Donc f est la **rotation d'axe** (Oz) **et d'angle** $-\frac{\pi}{2}$. *Avec le théorème : dans le plan $z=0$, d est dirigée par $\vec{i}$ et d' par $\vec{i}-\vec{j}$, donc $(d,d')=-\frac{\pi}{4}$ et $2\times(-\frac{\pi}{4})=-\frac{\pi}{2}$.*
   c. $f(M)=M$ équivaut à $y=x$ et $-x=y$, soit $x=y=0$: les points invariants forment l'axe (Oz).
3. Les plans (xOy) : $z=0$ et (xOz) : $y=0$ sont perpendiculaires suivant (Ox). La composée $s_{(xOy)}\circ s_{(xOz)}$ envoie $(x\,;y\,;z)$ sur $(x\,;-y\,;z)$, puis sur $(x\,;-y\,;-z)$: c'est le demi-tour d'axe (Ox). *(L'ordre n'a pas d'importance ici, car un demi-tour est sa propre réciproque.)*
4. Le premier plan $(P)=(yOz)$: $x=0$ est orthogonal à $2\vec{i}$. Le second est son image par la translation de vecteur $\vec{i}$: (P') : $x=1$. Ainsi $t_{2\vec{i}}=s_{P'}\circ s_P$. Contrôle : $(x\,;y\,;z)\mapsto(-x\,;y\,;z)\mapsto(2-(-x)\,;y\,;z)=(x+2\,;y\,;z)$.

Approfondissement

Exercice 13

1. a. $\overrightarrow{BD}\,(-1\,;1\,;0)$ et $\overrightarrow{BE}\,(-1\,;0\,;1)$:

   $$\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{BE}=\big(1\times1-0\times0\,;\;0\times(-1)-(-1)\times1\,;\;(-1)\times0-1\times(-1)\big)=(1\,;1\,;1)=\overrightarrow{AG}.$$

   La grande diagonale (AG) est orthogonale au plan (BDE).

   b. (BDE) : $x+y+z+d=0$, et B donne $d=-1$: (BDE) : $x+y+z-1=0$. L'aire de BDE vaut $\frac{1}{2}\|(1\,;1\,;1)\|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Les côtés BD, DE, EB sont des diagonales de faces, de longueur $\sqrt{2}$: le triangle est **équilatéral** (et l'aire d'un triangle équilatéral de côté $\sqrt{2}$ est bien $\frac{\sqrt{3}}{4}\times2=\frac{\sqrt{3}}{2}$).

2. a. $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right]=[\vec{i},\vec{j},\vec{k}]=1$, donc $V(ABDE)=\dfrac{1}{6}$.

   b. $d(A,(BDE))=\dfrac{3V}{\mathcal{A}}=\dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Avec la formule de Première : $\dfrac{|0+0+0-1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Un point de (AG) s'écrit $(t\,;t\,;t)$; il est dans (BDE) si $3t-1=0$, soit $t=\frac{1}{3}$: $K\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$. Le centre de gravité de BDE a pour coordonnées $\left(\frac{1+0+0}{3}\,;\frac{0+1+0}{3}\,;\frac{0+0+1}{3}\right)=K$.

4. a. $f(A)=A$, $f(B)=f(1\,;0\,;0)=(0\,;1\,;0)=D$, $f(D)=(0\,;0\,;1)=E$, $f(E)=(1\,;0\,;0)=B$, $f(G)=G$.

   b. Si $M'(z\,;x\,;y)$ et $N'(z_1\,;x_1\,;y_1)$ sont les images de $M(x\,;y\,;z)$ et $N(x_1\,;y_1\,;z_1)$, alors $M'N'^2=(z_1-z)^2+(x_1-x)^2+(y_1-y)^2=MN^2$: f conserve les distances. Un point de (AG) s'écrit $(t\,;t\,;t)$, et son image est $(t\,;t\,;t)$: il est invariant.

   c. $f(x\,;y\,;z)=(z\,;x\,;y)$, $f\circ f(x\,;y\,;z)=(y\,;z\,;x)$ et $f\circ f\circ f(x\,;y\,;z)=(x\,;y\,;z)$.

5. a. $\overrightarrow{KB}\left(\frac{2}{3}\,;-\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{KD}\left(-\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\,;-\frac{1}{3}\right)$. Donc $\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{KD}=-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=-\frac{1}{3}$ et $KB^2=KD^2=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$. Le cosinus de l'angle géométrique vaut $\dfrac{-1/3}{2/3}=-\dfrac{1}{2}$: l'angle géométrique est $\dfrac{2\pi}{3}$.

   b. $\overrightarrow{KB}\wedge\overrightarrow{KD}=\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\,;\;\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\,;\;\frac{4}{9}-\frac{1}{9}\right)=\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. Ce vecteur a le sens de $\overrightarrow{AG}$: la base $(\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KD},\overrightarrow{AG})$ est directe, et l'angle orienté $(\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KD})$, dans le plan (BDE) orienté par l'axe, est $+\frac{2\pi}{3}$. Comme $f(B)=D$, $K\in(AG)$ et $(KB)\perp(AG)$, l'angle de f est $\dfrac{2\pi}{3}$.

6. a. (P_1) : A donne $0-0=0$, G donne $1-1=0$, B donne $0-0=0$. (P_2) : A donne 0, G donne $1-1=0$, E donne $0-0=0$.

   b. s_{P_1} échange y et z : $(x\,;y\,;z)\mapsto(x\,;z\,;y)$; s_{P_2} échange x et y. Donc $s_{P_2}\circ s_{P_1}(x\,;y\,;z)=s_{P_2}(x\,;z\,;y)=(z\,;x\,;y)=f(x\,;y\,;z)$. Les vecteurs normaux $(0\,;1\,;-1)$ et $(1\,;-1\,;0)$ ont pour produit scalaire -1, et pour normes $\sqrt{2}$: le cosinus de l'angle des plans vaut $\frac{|-1|}{2}=\frac{1}{2}$, l'angle géométrique des deux plans est $\dfrac{\pi}{3}$. C'est cohérent : l'angle de la rotation est le double, $\dfrac{2\pi}{3}$.