Exercices

TERMINALE S1-S3 · CHAPITRE 11 · GÉOMÉTRIE PLANE

Séries S1, S3 et S1A. Deux exercices par leçon, du plus simple au plus complet ; l'exercice 14 est un exercice de synthèse. Quand des coordonnées sont données, le repère est orthonormé direct. Faire une figure à chaque exercice. Corrigés détaillés : fiche « Corrigés ».

Leçon 1 : barycentres et réduction d'une somme de vecteurs

Exercice 1 : réduire, puis en déduire un ensemble de points

On donne $A(0\,;0)$, $B(4\,;0)$ et $C(0\,;4)$.

1. Calculer les coordonnées du barycentre G de $(A,1)$, $(B,2)$, $(C,1)$.
2. Soit J le milieu de $[AC]$. Démontrer, par associativité, que G est le milieu de $[BJ]$, puis le vérifier avec les coordonnées.
3. Réduire, pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.
4. Démontrer que le vecteur $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$ ne dépend pas de M. L'exprimer à l'aide du milieu K de $[AB]$ et donner ses coordonnées.
5. Déterminer l'ensemble Γ des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$. Le point $E(4\,;2)$ appartient-il à Γ ?

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 2 : trois droites concourantes

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[BC]$, J le barycentre de $(A,1)$ et $(C,2)$, K le barycentre de $(A,1)$ et $(B,2)$, et G le barycentre de $(A,1)$, $(B,2)$, $(C,2)$.

1. Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$, et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Placer I, J, K.
2. Démontrer que G est le barycentre de $(A,1)$ et $(I,4)$. En déduire $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.
3. Démontrer que G appartient aussi aux droites (BJ) et (CK). Que peut-on dire des droites (AI), (BJ) et (CK) ?
4. *Contrôle.* On prend $A(0\,;0)$, $B(5\,;0)$, $C(0\,;5)$. Calculer les coordonnées de I, J, K et G, et vérifier le résultat de la question 2.

Leçon 2 : sommes de carrés de distances

Exercice 3 : lignes de niveau avec deux points

A et B sont deux points tels que $AB = 6$, et I est le milieu de $[AB]$.

1. Démontrer que, pour tout point M, $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 18$.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$, pour $k = 50$, puis $k = 18$, puis $k = 10$.
3. Démontrer que $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 24$.
4. Soit G le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -3)$.
   - **a.** Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis calculer GA et GB.
   - **b.** Démontrer que $MA^2 - 3MB^2 = -2MG^2 + 54$.
   - **c.** Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 - 3MB^2 = -18$. Vérifier que I en fait partie.

Exercice 4 : trois points, un minimum et une droite

On donne $A(0\,;0)$, $B(6\,;0)$ et $C(0\,;6)$. Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

1. Calculer les coordonnées de G, puis GA^2, GB^2 et GC^2.
2. Démontrer que, pour tout point M, $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + 48$. En quel point la somme $MA^2 + MB^2 + MC^2$ est-elle minimale ? Quelle est sa valeur minimale ?
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 60$.
4. On pose $g(M) = MA^2 + MB^2 - 2MC^2$.
   - **a.** Calculer le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
   - **b.** Démontrer que $g(M) = 2\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} - 36$, puis exprimer $g(M)$ en fonction des coordonnées $(x\,;y)$ de M.
   - **c.** Déterminer l'ensemble des points M tels que $g(M) = 0$. Vérifier que c'est une droite perpendiculaire à $\vec{u}$.

SanAcad, une solution de ParaTech

Leçon 3 : applications affines

Exercice 5 : étude d'une application affine

Soit g l'application qui, au point $M(x\,;y)$, associe le point $M'(x'\,;y')$ tel que

$$x' = x + 2y - 1, \qquad y' = -x + y + 3.$$

1. Justifier que g est affine et donner son application linéaire associée φ. Démontrer que g est une transformation.
2. Calculer les images A', B', C' des points $A(1\,;0)$, $B(3\,;2)$ et $C(-1\,;2)$.
3. Vérifier sur cet exemple que g conserve le milieu de $[AB]$ et le centre de gravité du triangle ABC.
4. Déterminer une équation de l'image de la droite D d'équation $y = 2x - 1$.
5. Déterminer le ou les points invariants de g.
6. Déterminer l'antécédent du point $(5\,;5)$.

Exercice 6 : conserver, ou non, le barycentre

1. Soit h l'application qui, au point $M(x\,;y)$, associe le point $M'(x + y^2\,;y)$. Avec $A(0\,;-1)$, $B(0\,;1)$ et leur milieu O, démontrer que h ne conserve pas le milieu. L'application h est-elle affine ?
2. Soit p la projection sur l'axe des abscisses : $p(x\,;y) = (x\,;0)$.
   - **a.** Justifier que p est affine. Est-ce une transformation ?
   - **b.** Déterminer l'image de la droite d'équation $y = x$, celle de la droite d'équation $x = 2$, puis celle du segment d'extrémités $(-1\,;3)$ et $(3\,;1)$.
3. Soit f une application affine, A et B deux points, et M le point défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. On note A', B', M' leurs images.
   - **a.** Écrire M comme barycentre de A et de B.
   - **b.** En déduire que $\overrightarrow{A'M'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B'}$.

Leçon 4 : angles orientés, lignes de niveau et cocyclicité

Exercice 7 : lignes de niveau angulaires

On donne $A(0\,;0)$ et $B(4\,;0)$. On cherche des ensembles de points M, distincts de A et de B.

1. Vérifier que le point $(2\,;2)$ vérifie $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}$, et que le point $(2\,;-2)$ vérifie $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = -\frac{\pi}{2}$. En déduire l'ensemble E_1 des points tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, puis l'ensemble E_2 des points tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.
2. On cherche l'ensemble E_3 des points tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.
   - **a.** Le centre Ω de l'arc est sur la médiatrice de $[AB]$ et vérifie $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) = \frac{\pi}{2}$. Démontrer que $\Omega(2\,;2)$ convient, mais pas le point $(2\,;-2)$. Calculer le rayon.
   - **b.** Démontrer que le point $Q(4\,;4)$ est sur le cercle de centre Ω, et calculer $\left(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QB}\right)$.
   - **c.** En déduire E_3. Que vaut l'angle $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$ sur l'autre arc ?
3. Déterminer les ensembles des points tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \pi\ [2\pi]$, puis $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = 0\ [2\pi]$.

Exercice 8 : démontrer une cocyclicité

Partie A. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus, H son orthocentre, A' le pied de la hauteur issue de A et B' celui de la hauteur issue de B.

1. Démontrer que A, B, A', B' sont cocycliques, et préciser le cercle.
2. Démontrer que C, A', H, B' sont cocycliques, et préciser le cercle.

Partie B. On donne $A(6\,;2)$, $B(1\,;7)$, $C(-2\,;-2)$ et $D(4\,;-2)$.

1. Calculer les nombres complexes $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et $\dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_D}$. En déduire $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)$.
2. Démontrer que les points A, B, C, D sont cocycliques. C et D sont-ils sur le même arc d'extrémités A et B ?
3. Vérifier que le cercle a pour centre $\Omega(1\,;2)$ et pour rayon 5.

Leçon 5 : isométries

Exercice 9 : composer et décomposer

1. Soit D_1 la droite d'équation $y = 1$ et D_2 la droite d'équation $x = 2$. Donner les expressions analytiques de s_{D_1} et s_{D_2}, puis celle de $s_{D_2} \circ s_{D_1}$. Reconnaître cette transformation.
2. Mêmes questions avec $D : y = -1$ et $D' : y = 2$, pour $s_{D'} \circ s_D$.
3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   - **a.** Déterminer la droite D' telle que $r = s_{D'} \circ s_{(Ox)}$.
   - **b.** Déterminer la droite Δ telle que $r = s_{(Ox)} \circ s_{\Delta}$.
4. Soit r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et r_2 la rotation de centre $B(4\,;0)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Sans calcul, quelle est la nature de $r_2 \circ r_1$? Le vérifier avec les écritures complexes et préciser l'élément caractéristique.

Exercice 10 : identifier une isométrie

On considère les applications f et g définies par

$$f(x\,;y) = (-x + 4\,;y + 2) \qquad \text{et} \qquad g(x\,;y) = (-y + 2\,;x).$$

1. Démontrer que f et g sont des isométries.
2. **Étude de f.**
   - **a.** Démontrer que f n'a aucun point invariant. Calculer $f \circ f$.
   - **b.** Soit Δ la droite d'équation $x = 2$. Démontrer que $f = t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta}$, avec $\vec{u}(0\,;2)$. Conclure.
   - **c.** Vérifier que, pour tout point M, le milieu de $[MM']$ est sur Δ.
3. **Étude de g.** Déterminer les points invariants de g. En déduire sa nature, puis ses éléments caractéristiques (on pourra calculer l'image du point $(2\,;1)$).
4. **Approfondissement.** Calculer $g \circ f$. Est-ce un déplacement ou un antidéplacement ? A-t-il des points invariants ? Démontrer que $g \circ f$ est la réflexion d'axe $x + y = 2$ suivie de la translation de vecteur $(-2\,;2)$, et conclure.

Leçon 6 : similitudes directes

Exercice 11 : dans un triangle rectangle isocèle

On donne $A(0\,;0)$, $B(4\,;0)$, $C(0\,;4)$ et I le milieu de $[BC]$. Soit s la similitude directe de centre B qui transforme I en A.

1. Quelle est la nature du triangle BIA ? En déduire le rapport et l'angle de s.
2. Déterminer, par des arguments géométriques, les images de A et de C par s. Les reconnaître.
3. Déterminer l'écriture complexe de s et vérifier les résultats de la question 2.
4. Déterminer l'image par s du cercle circonscrit au triangle ABC.
5. Écrire la forme réduite de s. Quelle est la nature de $s \circ s$? Donner son écriture complexe.

Exercice 12 : construire le centre d'une similitude

On donne $A(3\,;2)$, $B(4\,;0)$, $A'(0\,;3)$ et $B'(4\,;5)$. Soit s la similitude directe telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{A'B'}$, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'B'}$, et les longueurs AB et $A'B'$. En déduire le rapport et l'angle de s.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection P des droites (AB) et $(A'B')$.
3. Expliquer pourquoi le centre Ω de s est sur les cercles de diamètres $[AA']$ et $[BB']$. Calculer les coordonnées de Ω.
4. Déterminer l'écriture complexe de s, et vérifier que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.
5. Démontrer que $s \circ s$ est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 7 : triangles semblables

Exercice 13 : triangle rectangle, hauteur et cordes

Partie A. ABC est un triangle rectangle en A, avec $AB = 5$ et $AC = 12$. Soit H le pied de la hauteur issue de A.

1. Calculer BC.
2. Démontrer que les triangles HBA et ABC sont semblables. En déduire BH, puis CH.
3. Démontrer que $AH^2 = HB \times HC$ et calculer AH. Retrouver AH en calculant de deux façons l'aire du triangle ABC.
4. *Orientation.* Dans le repère $A(0\,;0)$, $B(5\,;0)$, $C(0\,;12)$, calculer $\dfrac{z_A - z_H}{z_B - z_H}$ et $\dfrac{z_C - z_H}{z_A - z_H}$. Que peut-on en déduire pour les triangles HBA et HAC ? Préciser la similitude qui transforme l'un en l'autre.

Partie B. Deux cordes $[AB]$ et $[CD]$ d'un cercle se coupent en un point P. On sait que $PA = 3$, $PB = 8$ et $PC = 4$. Calculer PD, en justifiant la similitude de triangles utilisée.

Exercice 14 : un lieu géométrique (synthèse)

Dans le plan complexe, on donne $A(1)$, $B(2)$ et $C(2+i)$. À tout point M d'affixe z, distinct de A, on associe le point N tel que le triangle AMN soit directement semblable au triangle ABC.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que $N = s(M)$, où s est une similitude directe de centre A dont on précisera le rapport et l'angle. Démontrer que s a pour écriture complexe $z' = (1+i)z - i$.
3. Le point M décrit la droite Δ d'équation $x = 3$. Déterminer l'ensemble décrit par N.
4. Le point M décrit le cercle Γ de centre $E(3)$ et de rayon 1. Déterminer l'ensemble décrit par N.
5. On choisit $M(3+i)$. Calculer l'affixe de N, vérifier qu'il appartient aux deux ensembles précédents, et calculer l'aire du triangle AMN.

SenAcad, une solution de BarroTech