Corrigés détaillés

TERMINALE S1-S3 · CHAPITRE 11 · GÉOMÉTRIE PLANE

Chaque résultat a été vérifié par calcul exact. Les rappels de méthode sont en italique.

Exercice 1

1. *La somme des coefficients vaut* 4. $x_G = \dfrac{1\times 0 + 2\times 4 + 1\times 0}{4} = 2$ et $y_G = \dfrac{0+0+1\times 4}{4} = 1$: $G(2\,;1)$.
2. J est le barycentre de $(A,1)$ et $(C,1)$. Par associativité, G est le barycentre de $(J,2)$ et $(B,2)$: c'est le milieu de $[BJ]$. Avec $J(0\,;2)$, le milieu de $[BJ]$ a pour coordonnées $\left(\frac{4+0}{2}\,;\frac{0+2}{2}\right) = (2\,;1)$: c'est bien G.
3. *Théorème 1 :* $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\,\overrightarrow{MG}$.
4. La somme des coefficients est $1 + 1 - 2 = 0$: le vecteur ne dépend pas de M. En prenant $M = C$:

$$\vec{v} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\,\overrightarrow{CK}.$$

   Avec $K(2\,;0)$, $\overrightarrow{CK}(2\,;-4)$, donc $\vec{v}(4\,;-8)$.
5. La condition s'écrit $4MG = \|\vec{v}\| = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$, soit $MG = \sqrt{5}$. Γ est le **cercle de centre** $G(2\,;1)$ **et de rayon** $\sqrt{5}$. Comme $EG^2 = (4-2)^2 + (2-1)^2 = 5$, le point E appartient à Γ.

SenAcad, une solution de Barrolech

Exercice 2

1. $J = \mathrm{bar}\{(A,1),(C,2)\}$ donne $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. De même $\overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. Par homogénéité, I est le barycentre de $(B,2)$ et $(C,2)$. Par associativité, $G = \mathrm{bar}\{(A,1),(I,4)\}$, donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{AI}$.
3. J est le barycentre de $(A,1)$ et $(C,2)$, de masse totale 3 : $G = \mathrm{bar}\{(J,3),(B,2)\}$, donc $G \in (BJ)$. De même $G = \mathrm{bar}\{(K,3),(C,2)\}$, donc $G \in (CK)$. Les droites (AI), (BJ) et (CK) sont **concourantes en** G.
4. $I\left(\frac{5}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$, $J\left(0\,;\frac{10}{3}\right)$, $K\left(\frac{10}{3}\,;0\right)$ et $G\left(\frac{0+10+0}{5}\,;\frac{0+0+10}{5}\right) = (2\,;2)$. On vérifie : $\frac{4}{5}\,\overrightarrow{AI} = \frac{4}{5}\left(\frac{5}{2}\,;\frac{5}{2}\right) = (2\,;2) = \overrightarrow{AG}$.

Exercice 3

1. *Théorème 2 avec $G = I$:* $IA = IB = 3$, donc $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 9 + 9 = 2MI^2 + 18$.
2. - $k = 50$: $2MI^2 = 32$, $MI = 4$: **cercle de centre I et de rayon 4.**
   - $k = 18$: $MI = 0$: **le point I.**
   - $k = 10$: $MI^2 = -4$: **ensemble vide.**
3. $MA^2 - MB^2 = \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) = \overrightarrow{BA} \cdot 2\,\overrightarrow{MI} = 2\,\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$. La condition $MA^2 - MB^2 = 24$ s'écrit $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$. Si H est le projeté orthogonal de M sur (AB), $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$: H est sur la demi-droite $[IB)$ et $IH \times 6 = 12$, soit $IH = 2$ (donc $HB = 1$). L'ensemble est la **droite perpendiculaire à (AB) en H.**
4. **a.** $\overrightarrow{AG} = \dfrac{-3}{1-3}\overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$: G est au-delà de B, avec $GA = 9$ et $GB = 3$. **b.** La somme des coefficients vaut -2. *Théorème 2 :* $MA^2 - 3MB^2 = -2MG^2 + GA^2 - 3GB^2 = -2MG^2 + 81 - 27 = -2MG^2 + 54$. **c.** $-2MG^2 + 54 = -18$ donne $MG^2 = 36$: c'est le **cercle de centre G et de rayon** 6. Comme $IG = AG - AI = 9 - 3 = 6$, I est sur ce cercle ; on vérifie aussi $IA^2 - 3IB^2 = 9 - 27 = -18$.

Exercice 4

1. $G\left(\frac{0+6+0}{3} ; \frac{0+0+6}{3}\right) = (2\,;2)$. $GA^2 = 4 + 4 = 8$, $GB^2 = 16 + 4 = 20$, $GC^2 = 4 + 16 = 20$.
2. *Théorème 2 :* $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + 8 + 20 + 20 = 3MG^2 + 48$. Comme $3MG^2 \geq 0$, la somme est minimale quand $MG = 0$: **au point G**, où elle vaut 48.
3. $3MG^2 + 48 = 60$ donne $MG^2 = 4$: **cercle de centre $G(2\,;2)$ et de rayon 2.**
4. **a.** $\vec{u} = \vec{0} + (6\,;0) - 2\,(0\,;6) = (6\,;-12)$. **b.** La somme des coefficients est nulle. *Théorème 3 avec $O = A$:* $g(M) = 2\,\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} + \left(AA^2 + AB^2 - 2AC^2\right) = 2\,\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} + 36 - 72 = 2\,\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} - 36$. Avec $\overrightarrow{MA}(-x\,;-y)$:

   $$g(M) = 2(-6x + 12y) - 36 = -12x + 24y - 36.$$

   Contrôle direct : $x^2 + y^2 + (x-6)^2 + y^2 - 2\left[x^2 + (y-6)^2\right] = -12x + 24y - 36$. **c.** $g(M) = 0$ équivaut à $x - 2y + 3 = 0$: c'est une **droite**, de vecteur normal $(1\,;-2)$, colinéaire à $\vec{u} = 6\,(1\,;-2)$: elle est perpendiculaire à $\vec{u}$. Elle passe par $(-3\,;0)$ et $(1\,;2)$.

Exercice 5

1. x' et y' sont de la forme $ax+by+p$ et $cx+dy+q$, avec $a=1$, $b=2$, $p=-1$, $c=-1$, $d=1$, $q=3$: g est affine. Son application linéaire associée est $\varphi(X\,;Y)=(X+2Y\,;-X+Y)$. Comme $ad-bc=1+2=3\neq 0$, g est une transformation.
2. $A'(1+0-1\,;-1+0+3)=(0\,;2)$, $B'(3+4-1\,;-3+2+3)=(6\,;2)$, $C'(-1+4-1\,;1+2+3)=(2\,;6)$.
3. Le milieu $(2\,;1)$ de $[AB]$ a pour image $(2+2-1\,;-2+1+3)=(3\,;2)$, qui est le milieu de $[A'B']$. Le centre de gravité $\left(1\,;\frac{4}{3}\right)$ de ABC a pour image $\left(1+\frac{8}{3}-1\,;-1+\frac{4}{3}+3\right)=\left(\frac{8}{3}\,;\frac{10}{3}\right)$, qui est le centre de gravité $\left(\frac{0+6+2}{3}\,;\frac{2+2+6}{3}\right)$ de $A'B'C'$.
4. Les points de D s'écrivent $M(t\,;2t-1)$. Leurs images : $x'=t+4t-2-1=5t-3$ et $y'=-t+2t-1+3=t+2$. Avec $t=y'-2$: $x'=5y'-13$. L'image de D est la **droite d'équation** $x-5y+13=0$.
5. M est invariant si $x=x+2y-1$ et $y=-x+y+3$, soit $y=\frac{1}{2}$ et $x=3$: **un seul point invariant,** $\left(3\,;\frac{1}{2}\right)$.
6. On résout $x+2y-1=5$ et $-x+y+3=5$, soit $x+2y=6$ et $-x+y=2$. En additionnant, $3y=8$, donc $y=\frac{8}{3}$ et $x=y-2=\frac{2}{3}$. L'antécédent est $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{8}{3}\right)$.

Exercice 6

SenAcad, une solution de BarroTech

1. $h(A)=(0+1\,;-1)=(1\,;-1)$, $h(B)=(1\,;1)$ et $h(O)=(0\,;0)$. Le milieu de $[h(A)h(B)]$ est $(1\,;0)\neq h(O)$: h ne conserve pas le milieu. D'après le théorème 4, h **n'est pas affine**.
2. **a.** $x'=1\times x+0\times y+0$ et $y'=0\times x+0\times y+0$: p est affine. Ici $ad-bc=1\times 0-0\times 0=0$: ce n'est **pas** une transformation (par exemple $(0\,;0)$ et $(0\,;1)$ ont la même image, et le point $(0\,;1)$ n'a pas d'antécédent). **b.** Les points $(t\,;t)$ ont pour images $(t\,;0)$: l'image de la droite $y=x$ est **l'axe des abscisses entier**. Les points $(2\,;t)$ ont tous pour image $(2\,;0)$: l'image de la droite $x=2$ est **un seul point**. L'image du segment est le segment d'extrémités $p(-1\,;3)=(-1\,;0)$ et $p(3\,;1)=(3\,;0)$.
3. **a.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ signifie $M=\text{bar}\left\{\left(A,\frac{2}{3}\right),\left(B,\frac{1}{3}\right)\right\}$, soit, par homogénéité, $M=\text{bar}\{(A,2),(B,1)\}$. **b.** f conserve le barycentre : $M'=\text{bar}\{(A',2),(B',1)\}$, donc $\overrightarrow{A'M'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A'B'}$.

Exercice 7

1. Pour $M(2\,;2)$: $\overrightarrow{MA}(-2\,;-2)$ et $\overrightarrow{MB}(2\,;-2)$. En faisant tourner $\overrightarrow{MA}$ d'un quart de tour direct, on obtient $(2\,;-2) = \overrightarrow{MB}$: $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}$. Pour $M(2\,;-2)$: $\overrightarrow{MA}(-2\,;2)$ devient $(-2\,;-2) = -\overrightarrow{MB}$: l'angle vaut $-\frac{\pi}{2}$. *Théorème 5 :* E_1 est un arc du cercle dont le centre Ω_1 est sur la médiatrice et vérifie $\left(\overrightarrow{\Omega_1 A}, \overrightarrow{\Omega_1 B}\right) = \pi$: c'est le milieu $(2\,;0)$ de $[AB]$. E_1 **est le demi-cercle de diamètre** $[AB]$ **situé au-dessus de l'axe des abscisses**, privé de A et B (il contient $(2\,;2)$). E_2 **est le cercle de diamètre** $[AB]$ **entier**, privé de A et B.
2. **a.** $\Omega(2\,;2)$ est sur la médiatrice $x = 2$, et $\overrightarrow{\Omega A}(-2\,;-2)$, $\overrightarrow{\Omega B}(2\,;-2)$: on vient de voir que l'angle vaut $\frac{\pi}{2}$. Pour le point $(2\,;-2)$, il vaut $-\frac{\pi}{2}$: ce point ne convient pas. Rayon : $\Omega A = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$. **b.** $\Omega Q^2 = (4-2)^2 + (4-2)^2 = 8$: Q est sur le cercle. $\overrightarrow{QA}(-4\,;-4)$ fait l'angle $-\frac{3\pi}{4}$ avec $\vec{i}$, et $\overrightarrow{QB}(0\,;-4)$ l'angle $-\frac{\pi}{2}$: $\left(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QB}\right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. **c.** E_3 **est l'arc du cercle de centre** $\Omega(2\,;2)$ **et de rayon** $2\sqrt{2}$**, d'extrémités** A **et** B**, situé au-dessus de l'axe des abscisses** (il contient Q), privé de A et B. Sur l'autre arc, l'angle vaut $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$, soit $-\frac{3\pi}{4}$.
3. $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \pi$: **le segment** $]AB[$ (les deux vecteurs sont de sens contraires). $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = 0$: **la droite** (AB) **privée du segment** $[AB]$.

Exercice 8

Partie A.

SenAcad, une solution de BarroTech

1. $(AA') \perp (BC)$ et $B \in (BC)$, donc $\left(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'B}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. De même $\left(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'B}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. *Cas particulier du théorème 6 :* A' et B' sont sur le cercle de diamètre $[AB]$. Donc A**,** B**,** A'**,** B' **sont sur le cercle de diamètre** $[AB]$.
2. $H \in (AA')$ et $C \in (BC)$, donc $\left(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'H}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$; de même $\left(\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{B'H}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. C**,** A'**,** H**,** B' **sont sur le cercle de diamètre** $[CH]$**.**

Partie B.

1. $z_B - z_C = 3 + 9i$ et $z_A - z_C = 8 + 4i$:
$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{(3+9i)(8-4i)}{80} = \frac{60+60i}{80} = \frac{3}{4}(1+i).$$
$z_B - z_D = -3 + 9i$ et $z_A - z_D = 2 + 4i$:
$$\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} = \frac{(-3+9i)(2-4i)}{20} = \frac{30+30i}{20} = \frac{3}{2}(1+i).$$
Au chapitre 7 : $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \arg\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$. Les deux nombres sont des multiples positifs de $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$: $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.
2. A, B, C ne sont pas alignés (l'angle $\frac{\pi}{4}$ n'est pas un multiple de π), et les deux angles sont égaux : *théorème 7*, **les quatre points sont cocycliques**. L'égalité ayant lieu à 2π près, C **et** D **sont sur le même arc**.
3. $\Omega A^2 = 25 + 0$, $\Omega B^2 = 0 + 25$, $\Omega C^2 = 9 + 16$, $\Omega D^2 = 9 + 16$: les quatre distances valent 5.

Exercice 9

1. $s_{D_1}(x\,;y) = (x\,;2-y)$ et $s_{D_2}(x\,;y) = (4-x\,;y)$, donc $s_{D_2} \circ s_{D_1}(x\,;y) = (4-x\,;2-y)$. C'est la **symétrie de centre** $(2\,;1)$, point d'intersection des axes : les axes sont perpendiculaires, et on obtient la rotation d'angle $2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$.
2. $s_D(x\,;y) = (x\,;-2-y)$ et $s_{D'}(x\,;y) = (x\,;4-y)$, donc $s_{D'} \circ s_D(x\,;y) = \big(x\,;4-(-2-y)\big) = (x\,;y+6)$: **translation de vecteur** $(0\,;6)$, le double du vecteur $(0\,;3)$ qui va de D à D'.
3. **a.** *Théorème 9 :* D' passe par O et fait l'angle $\frac{\pi}{4}$ avec (Ox) : D' : $y = x$. Contrôle : $s_{D'} \circ s_{(Ox)}(x\,;y) = s_{D'}(x\,;-y) = (-y\,;x)$. **b.** Il faut $(\Delta, (Ox)) = \frac{\pi}{4}$: Δ fait l'angle $-\frac{\pi}{4}$ avec (Ox), Δ : $y = -x$. Contrôle : $s_\Delta(x\,;y) = (-y\,;-x)$, puis $s_{(Ox)}$ donne $(-y\,;x)$.
4. $\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$: $r_2 \circ r_1$ est une **translation** (paragraphe 5.5). En complexes, $r_1 : z \mapsto iz$ et $r_2 : z \mapsto 4 - i(z-4) = -iz + 4 + 4i$, donc $r_2 \circ r_1 : z \mapsto -i(iz) + 4 + 4i = z + 4 + 4i$: translation de **vecteur** $(4\,;4)$.

Exercice 10

1. Pour $M(x_1\,;y_1)$ et $N(x_2\,;y_2)$: $f(M)f(N)^2 = (-x_2+x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 = MN^2$, et $g(M)g(N)^2 = (-y_2+y_1)^2 + (x_2-x_1)^2 = MN^2$.
2. **a.** $f(M) = M$ imposerait $y + 2 = y$: **aucun point invariant**. $f \circ f(x\,;y) = f(-x+4\,;y+2) = (x\,;y+4)$: c'est la translation de vecteur $(0\,;4)$. **b.** $s_\Delta(x\,;y) = (4-x\,;y)$, puis $t_{\vec{u}}$ donne $(4-x\,;y+2) = f(x\,;y)$. Le vecteur $\vec{u}(0\,;2)$ dirige Δ : f **est la symétrie glissée d'axe** Δ : $x = 2$ **et de vecteur** $(0\,;2)$. **c.** Le milieu de $[MM']$ a pour coordonnées $\left(\frac{x-x+4}{2}\,;\frac{2y+2}{2}\right) = (2\,;y+1)$: il est sur Δ.
3. $g(M) = M$ équivaut à $x = -y+2$ et $y = x$, soit $x = y = 1$: **un seul point invariant** $\Omega(1\,;1)$. *Théorème 10 :* g est une rotation de centre Ω. Le point $(2\,;1)$ a pour image $(1\,;2)$: $\overrightarrow{\Omega M}(1\,;0)$ devient $(0\,;1)$, l'angle vaut $\frac{\pi}{2}$. $g = r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$.
4. $g \circ f(x\,;y) = g(-x+4\,;y+2) = \big(-(y+2)+2\,;-x+4\big) = (-y\,;4-x)$. C'est un déplacement composé avec un antidéplacement : un **antidéplacement**. Un point invariant vérifierait $x = -y$ et $y = 4-x = 4+y$: impossible, **aucun point invariant**. La réflexion d'axe $x+y=2$ s'écrit $(x\,;y) \mapsto (2-y\,;2-x)$; suivie de la translation de vecteur $(-2\,;2)$, elle donne $(-y\,;4-x)$. Le vecteur $(-2\,;2)$ dirige l'axe : $g \circ f$ **est la symétrie glissée d'axe** $x+y=2$ **et de vecteur** $(-2\,;2)$.

Exercice 11

1. ABC est rectangle isocèle en A et I est le milieu de l'hypoténuse : $IA = IB = IC$ et $(AI) \perp (BC)$. BIA **est rectangle isocèle en** I**.** Donc $\dfrac{BA}{BI} = \sqrt{2}$, et $\left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{4}$ (le vecteur $\overrightarrow{BI}(-2\,;2)$ fait l'angle $\frac{3\pi}{4}$ avec $\vec{i}$, et $\overrightarrow{BA}(-4\,;0)$ l'angle π). **Rapport** $\sqrt{2}$**, angle** $\frac{\pi}{4}$**.**
2. Soit $A_1 = s(A)$: $BA_1 = \sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}$ et $\overrightarrow{BA_1}$ fait l'angle $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ avec $\vec{i}$, donc $\overrightarrow{BA_1} = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (-4\,;-4)$ et $A_1(0\,;-4)$**, symétrique de** C **par rapport à** A. Soit $C_1 = s(C)$: $BC = 4\sqrt{2}$, donc $BC_1 = 8$, et $\overrightarrow{BC_1}$ fait l'angle $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$: $C_1(-4\,;0)$**, symétrique de** B **par rapport à** A.
3. $z' - 4 = (1+i)(z-4)$, car $\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i$. Donc $z' = (1+i)z - 4i$. On vérifie $s(0) = -4i$ et $s(4i) = 4i - 4 - 4i = -4$.
4. Le triangle ABC est rectangle en A : son cercle circonscrit a pour centre I et pour rayon $IA = 2\sqrt{2}$. Son image a pour centre $s(I) = A$ et pour rayon $\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$: **le cercle de centre** A **et de rayon** 4 (il passe par B, C, A_1 et C_1).
5. $s = h\left(B, \sqrt{2}\right) \circ r\left(B, \frac{\pi}{4}\right)$. $s \circ s$ a pour centre B, pour rapport 2 et pour angle $\frac{\pi}{2}$: c'est **la similitude** $h(B,2) \circ r\left(B, \frac{\pi}{2}\right)$, d'écriture $z' = (1+i)\big((1+i)z - 4i\big) - 4i = 2iz + 4 - 8i$.

Exercice 12

1. $\overrightarrow{AB}(1\,;-2)$ et $\overrightarrow{A'B'}(4\,;2)$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'B'} = 4 - 4 = 0$; $AB = \sqrt{5}$ et $A'B' = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Le quart de tour direct transforme $(1\,;-2)$ en $(2\,;1)$, et $\overrightarrow{A'B'} = 2\,(2\,;1)$. **Rapport** 2**, angle** $\frac{\pi}{2}$**.**
2. $(AB) : y = -2x + 8$ et $(A'B') : y = \frac{x}{2} + 3$. $-2x + 8 = \frac{x}{2} + 3$ donne $x = 2$, puis $y = 4$: $P(2\,;4)$.
3. $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}\right) = \frac{\pi}{2}$: Ω est sur le cercle de diamètre $[AA']$ (cas particulier du théorème 6) ; de même sur celui de diamètre $[BB']$. Ce sont les cercles PAA' et PBB' de la méthode, puisque $(AB) \perp (A'B')$.
   - Cercle de diamètre $[AA']$: centre $\left(\frac{3}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$, rayon au carré $\frac{AA'^2}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.
   - Cercle de diamètre $[BB']$: centre $\left(4\,;\frac{5}{2}\right)$, rayon au carré $\frac{25}{4}$.

   En soustrayant les équations : $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - (x-4)^2 = \frac{5}{2} - \frac{25}{4}$, soit $\frac{5}{2}\left(2x - \frac{11}{2}\right) = -\frac{15}{4}$, donc $x = 2$. Puis $\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$, donc $y = 4$ ou $y = 1$. Le point $(2\,;4)$ est P : $\Omega(2\,;1)$.
4. $z' - (2+i) = 2i\big(z - (2+i)\big)$, soit $z' = 2iz + 4 - 3i$. On vérifie $2i(3+2i) + 4 - 3i = 3i$ et $2i \times 4 + 4 - 3i = 4 + 5i$.
5. $s \circ s : z \mapsto 2i(2iz + 4 - 3i) + 4 - 3i = -4z + 10 + 5i$. Le coefficient -4 est réel : **homothétie de rapport** -4, de centre $\dfrac{10+5i}{1+4} = 2 + i$, c'est-à-dire Ω (rapport 2×2, angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$).

Exercice 13

Partie A.

1. $BC = \sqrt{25 + 144} = 13$.
2. HBA et ABC ont l'angle $\widehat{B}$ en commun et un angle droit (en H et en A) : ils sont semblables, avec $H \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow C$. Donc $\dfrac{BH}{BA} = \dfrac{BA}{BC}$, $BH = \dfrac{25}{13}$, puis $CH = 13 - \dfrac{25}{13} = \dfrac{144}{13}$.
3. HBA et HAC sont rectangles en H, et $\widehat{HBA} = \widehat{HAC}$ (complémentaires du même angle $\widehat{HAB}$) : ils sont semblables, d'où $\dfrac{HB}{HA} = \dfrac{HA}{HC}$, soit $AH^2 = HB \times HC = \dfrac{25 \times 144}{169}$ et $AH = \dfrac{5 \times 12}{13} = \dfrac{60}{13}$. Avec l'aire : $\dfrac{AB \times AC}{2} = 30 = \dfrac{BC \times AH}{2}$, donc $AH = \dfrac{60}{13}$.
4. On trouve $H\left(\frac{720}{169} ; \frac{300}{169}\right)$ et $\dfrac{z_A - z_H}{z_B - z_H} = \dfrac{z_C - z_H}{z_A - z_H} = -\dfrac{12}{5}i$. *Théorème 12 (critère 4) :* HBA **et** HAC **sont directement semblables**, par la similitude de centre H, de rapport $\frac{12}{5}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, qui transforme B en A et A en C.

Partie B. Les triangles PAC et PDB sont semblables (angles en P opposés par le sommet, angles inscrits $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ qui interceptent le même arc). Donc $PA \times PB = PC \times PD$, soit $24 = 4\,PD$ et $PD = 6$.

Exercice 14

SenAcad, une solution de BarroTech

1. $AB = 1$, $BC = |i| = 1$ et $AC = |1 + i| = \sqrt{2}$. Comme $AB^2 + BC^2 = AC^2$ et $AB = BC$, ABC **est rectangle isocèle en** B.
2. *Critère 4 du théorème 12 :* AMN est directement semblable à ABC si et seulement si $\dfrac{z_N - z_A}{z_M - z_A} = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{1 + i}{1} = 1 + i$, soit $z_N = 1 + (1 + i)(z - 1) = (1 + i)z - i$. Donc $N = s(M)$, où s est la similitude de **centre** A**, de rapport** $|1 + i| = \sqrt{2}$ **et d'angle** $\frac{\pi}{4}$.
3. $M(3 + it)$, $t \in \mathbb{R}$, donne $z_N = (1 + i)(3 + it) - i = (3 - t) + i(2 + t)$: $x + y = 5$. Quand t décrit $\mathbb{R}$, N décrit **la droite d'équation** $x + y = 5$, image de Δ par s.
4. N décrit **le cercle de centre** $s(E) = (1 + i) \times 3 - i = 3 + 2i$ **et de rayon** $\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$.
5. $z_N = (1 + i)(3 + i) - i = 2 + 3i$. On a $2 + 3 = 5$, et la distance de N à $3 + 2i$ vaut $|-1 + i| = \sqrt{2}$: N est sur les deux ensembles (normal : M est à la fois sur Δ et sur Γ). Le triangle AMN est rectangle isocèle en M, avec $AM = |2 + i| = \sqrt{5}$: son aire vaut $\dfrac{AM^2}{2} = \dfrac{5}{2}$.