Arithmétique : exercices

TERMINALE S1-S3 · CHAPITRE 10 · EXERCICES D'APPLICATION

Séries S1, S3 et S1A. Exercices classés par leçon, du plus simple au plus complet ; l'exercice 14 est un exercice d'approfondissement. Les situations « simplifiées » utilisent des données inventées. Les calculs de restes se font sans calculatrice, avec les congruences. Les corrigés détaillés sont dans la fiche « Corrigés ».

Leçon 1 : divisibilité et division euclidienne

Exercice 1 : diviseurs et divisibilité

1. Déterminer les diviseurs positifs de 60. Combien 60 a-t-il de diviseurs dans $\mathbb{Z}$?
2. Soit n un entier relatif. Montrer que tout diviseur commun d de $5n+3$ et de $2n+1$ divise 1. Que vaut alors d ?
3. Déterminer les entiers naturels n tels que $n+3$ divise $2n+13$.
4. Déterminer les entiers relatifs n, différents de 1, tels que $n-1$ divise $n+5$.

Exercice 2 : division euclidienne

1. Effectuer la division euclidienne de $2\,026$ par 13, puis celle de $-2\,026$ par 13.
2. Dans la division euclidienne d'un entier naturel a par 23, le quotient est 41. Quelles sont les valeurs possibles de a ?
3. Déterminer les entiers naturels non nuls a dont le quotient et le reste, dans la division euclidienne par 7, sont égaux.
4. a. Soit n un entier. En distinguant le cas n pair ($n=2k$) et le cas n impair ($n=2k+1$), montrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 est 0 ou 1.
   b. En déduire que la somme des carrés de deux entiers n'est jamais de la forme $4k+3$, avec k entier.
   c. L'entier $2\,027$ est-il la somme des carrés de deux entiers ?

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 2 : congruences

Exercice 3 : restes et puissances

1. Sans calculatrice, déterminer le reste de la division euclidienne par 7 de :
   a. 100 ; b. -45 ; c. $2\,026 \times 1\,999$; d. $2\,026^3$.
2. a. Recopier et compléter le tableau des restes modulo 7 :

k	0	1	2	3	4	5	6
reste de 3^k modulo 7							

   b. En déduire le reste de $3^{2\,027}$ dans la division par 7.
   c. Déterminer les entiers naturels n tels que $3^n \equiv 1\ [7]$.
   d. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3^{6n+2} + 5$ est divisible par 7.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 4 : calendrier, critères de divisibilité et clé de contrôle

1. Le 4 novembre 2026 est un mercredi.
   a. Entre le 4 novembre 2026 et le 4 novembre 2027, il y a 365 jours. Quel jour de la semaine sera le 4 novembre 2027 ?
   b. Quel jour de la semaine serons-nous 500 jours après le 4 novembre 2026 ?
2. a. Justifier que $10 \equiv 1\ [9]$ et que $10 \equiv -1\ [11]$.
   b. Sans effectuer de division, déterminer le reste de $123\,456\,789$ dans la division par 9, puis dans la division par 11.
3. **Clé de contrôle (situation simplifiée).** Un établissement donne à chaque élève un numéro N de six chiffres, suivi d'une clé K : K est le reste de la division euclidienne de N par 11. Quand on saisit un numéro, l'ordinateur recalcule la clé et la compare à celle qui est inscrite.
   a. Calculer la clé du numéro $207\,315$.
   b. En saisissant un numéro, une personne échange par erreur deux chiffres voisins **différents**. Montrer que la clé du numéro saisi n'est pas égale à K : l'erreur est détectée. *(Indication : utiliser la somme alternée des chiffres, et remarquer que les seuls multiples de 11 compris entre -18 et 18 sont -11, 0 et 11.)*
   c. On remplace cette clé par le reste de N dans la division par 9. Montrer que l'échange de deux chiffres n'est alors jamais détecté.

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 3 : PGCD et algorithme d'Euclide

Exercice 5 : algorithme d'Euclide et partage

1. Calculer $\mathrm{PGCD}(1\,053\,;325)$ par l'algorithme d'Euclide.
2. En déduire les diviseurs communs positifs de $1\,053$ et 325, puis la fraction irréductible égale à $1\,053/325$.
3. **Situation simplifiée.** Un professeur dispose de $1\,053$ cahiers et de 325 livres. Il veut les répartir en lots identiques, en utilisant tous les cahiers et tous les livres. Quel est le plus grand nombre de lots possible ? Que contient alors chaque lot ?
4. Calculer $\mathrm{PGCD}(1\,053\,;325\,;30)$. Les trois nombres $1\,053$, 325 et 30 sont-ils premiers entre eux deux à deux ?

Exercice 6 : PGCD et paramètre

1. Soit n un entier naturel. Montrer que $2n+1$ et $2n+3$ sont premiers entre eux.
2. Soit n un entier naturel, $a = 2n+7$ et $b = n+2$.
   a. Montrer que $\mathrm{PGCD}(a\,;b)$ divise 3.
   b. Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $\mathrm{PGCD}(a\,;b) = 3$.
3. Calculer $\mathrm{PGCD}(2\,400\,;3\,600)$ en utilisant la propriété $\mathrm{PGCD}(ka\,;kb) = k\,\mathrm{PGCD}(a\,;b)$.
4. Déterminer les couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels tels que $a < b$, $a+b = 96$ et $\mathrm{PGCD}(a\,;b) = 12$.

SeniAcad, une solution de Barnotech

Leçon 4 : identité de Bézout et théorème de Gauss

Exercice 7 : Bézout

1. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, montrer que 59 et 27 sont premiers entre eux, puis trouver deux entiers relatifs u et v tels que $59u + 27v = 1$.
2. En déduire un entier x, compris entre 0 et 58, tel que $27x \equiv 1\ [59]$.
3. Montrer que, pour tout entier relatif n, $3n+4$ et $2n+3$ sont premiers entre eux.
4. Soit a et b deux entiers premiers entre eux. Montrer que a et $a+b$ sont premiers entre eux.

Exercice 8 : Gauss

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $15x = 22y$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.
3. a. Montrer qu'un entier divisible par 4 et par 9 est divisible par 36.
   b. Un entier divisible par 4 et par 6 est-il toujours divisible par 24 ?
4. Déterminer les entiers relatifs n tels que 7 divise $4n+3$.

Leçon 5 : équations du type $ax + by = c$

Exercice 9 : résoudre des équations

1. Justifier que l'équation $21x + 15y = 4$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $21x + 15y = 6$.
3. a. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, trouver une solution particulière de $23x + 9y = 1$. En déduire une solution particulière de $23x + 9y = 3$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $23x + 9y = 3$.
   c. Déterminer les solutions de cette équation telles que $0 \leq x \leq 30$.

Exercice 10 : problèmes concrets et congruences

1. **Situation simplifiée.** Pour une sortie, un groupe a payé $4\,500$ F de tickets : 400 F par adulte et 250 F par élève. On note x le nombre d'adultes et y le nombre d'élèves.
   a. Montrer que $8x + 5y = 90$.
   b. Résoudre cette équation dans $\mathbb{Z}^2$, puis déterminer toutes les compositions possibles du groupe.
   c. Le groupe compte au moins un adulte, et plus d'élèves que d'adultes. Quelle est sa composition ?
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$:
   a. $4x \equiv 3\ [9]$;
   b. $6x \equiv 4\ [10]$ (on pourra utiliser un tableau des restes) ;
   c. $6x \equiv 5\ [10]$.
3. **Situation simplifiée.** Une commerçante a entre 150 et 190 mangues. Si elle les range par paquets de 7, il en reste 3 ; si elle les range par paquets de 5, il en reste 2. On note N le nombre de mangues.
   a. Vérifier que 17 est congru à 3 modulo 7 et à 2 modulo 5.
   b. Montrer que $N - 17$ est divisible par 7 et par 5, puis par 35.
   c. En déduire N.

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 6 : nombres premiers et décomposition

Exercice 11 : nombres premiers et décomposition

1. Les nombres 401 et 403 sont-ils premiers ? Justifier.
2. Décomposer $1\,980$ et 756 en produit de facteurs premiers.
3. En déduire $\mathrm{PGCD}(1\,980\,;756)$.
4. Combien $1\,980$ a-t-il de diviseurs positifs ?
5. Quel est le plus petit entier naturel non nul k tel que $1\,980\,k$ soit le carré d'un entier ?

Leçon 7 : PPCM et petit théorème de Fermat

Exercice 12 : PPCM et petit théorème de Fermat

1. **Situation simplifiée.** Trois grossistes livrent les boutiques d'un quartier : le premier tous les 8 jours, le deuxième tous les 14 jours, le troisième tous les 21 jours. Ils sont passés tous les trois aujourd'hui. Dans combien de jours repasseront-ils ensemble pour la première fois ?
2. En utilisant les décompositions de l'exercice 11, calculer $\text{PPCM}(1\,980\,;756)$, puis vérifier que $\text{PGCD}(1\,980\,;756) \times \text{PPCM}(1\,980\,;756) = 1\,980 \times 756$.
3. Déterminer les couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels tels que $a < b$, $\text{PGCD}(a\,;b) = 12$ et $\text{PPCM}(a\,;b) = 360$.
4. a. Utiliser le petit théorème de Fermat pour déterminer le reste de $2^{2\,026}$ dans la division par 11.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $n^7 - n$ est divisible par 7.
   c. Vérifier que $n^7 - n = (n-1)\,n\,(n+1)\,(n^4+n^2+1)$, puis en déduire que $n^7 - n$ est divisible par 42.

Leçon 8 : systèmes de numération

Exercice 13 : changer de base

1. Écrire en base dix : $\overline{110101}^{\,2}$; $\overline{2041}^{\,5}$; $\overline{1\text{A}3}^{\,16}$; $\overline{\text{FF}}^{\,16}$.
2. Écrire 300 en base deux, en base cinq et en base seize.
3. Écrire $\overline{10111011}^{\,2}$ en base seize, en groupant ses chiffres par quatre, puis en base dix.
4. a. Quel est le plus grand entier qui s'écrit avec dix chiffres en base deux ?
   b. Combien de chiffres a l'écriture de $1\,000$ en base deux ?

Exercice 14 : numération et divisibilité (approfondissement)

1. Déterminer les chiffres x et y tels que le nombre $N = \overline{3x1y}$, écrit en base dix, soit divisible par 45.
2. a. Montrer qu'un entier écrit en base cinq est congru modulo 4 à la somme de ses chiffres.
   b. Sans passer par la base dix, déterminer le reste de $\overline{4321}^{\,5}$ dans la division par 4. Vérifier en écrivant ce nombre en base dix.
3. a. Justifier que $2 \equiv -1 \ [3]$.
   b. En déduire qu'un entier écrit en base deux est congru modulo 3 à la somme alternée de ses chiffres, en partant du chiffre des unités.
   c. Appliquer ce critère à $\overline{110101}^{\,2}$ et à $\overline{1001}^{\,2}$.

SenAcad, une solution de BarroTech