Arithmétique : corrigés

TERMINALE S1-S3 · CHAPITRE 10 · CORRIGÉS DÉTAILLÉS

Séries S1, S3 et S1A. Corrigés détaillés des exercices d'application. Tous les résultats ont été vérifiés par calcul exact et, quand c'est possible, par une recherche exhaustive.

Leçon 1 : divisibilité et division euclidienne

Exercice 1

1. $60 = 2^2 \times 3 \times 5$. Ses diviseurs positifs sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 : il y en a 12. Dans $\mathbb{Z}$, il faut ajouter leurs opposés : 60 a 24 diviseurs.
2. Si d divise $5n+3$ et $2n+1$, il divise toute combinaison de ces deux nombres, en particulier
$$2\,(5n+3) - 5\,(2n+1) = 10n + 6 - 10n - 5 = 1.$$
Donc $d = 1$ ou $d = -1$: les entiers $5n+3$ et $2n+1$ n'ont pas d'autre diviseur commun.
3. $n+3$ divise $2(n+3) = 2n+6$. S'il divise $2n+13$, il divise la différence $(2n+13) - (2n+6) = 7$. Comme $n+3 \geq 3$, on a $n+3 = 7$, soit $n = 4$. Vérification : $2 \times 4 + 13 = 21 = 3 \times 7$. **La seule solution est $n = 4$.**
4. $n-1$ divise $n-1$; s'il divise $n+5$, il divise $(n+5) - (n-1) = 6$. Réciproquement, si $n-1$ divise 6, il divise $(n-1)+6 = n+5$. Donc $n-1 \in \{-6\,;-3\,;-2\,;-1\,;1\,;2\,;3\,;6\}$, c'est-à-dire
$$n \in \{-5\,;-2\,;-1\,;0\,;2\,;3\,;4\,;7\}.$$
Il y a 8 solutions. Par exemple, pour $n = -5$: $n-1 = -6$ divise $n+5 = 0$.

SenAcad, une solution de SenTech

Exercice 2

1. $13 \times 155 = 2\,015$, donc $2\,026 = 13 \times 155 + 11$ avec $0 \leq 11 < 13$: quotient 155, reste 11. Pour $-2\,026$: $-2\,026 = 13 \times (-155) - 11$, mais -11 n'est pas un reste. On retire 13 au produit et on l'ajoute au reste : $-2\,026 = 13 \times (-156) + 2$, avec $0 \leq 2 < 13$. **Quotient -156, reste 2.**
2. $a = 23 \times 41 + r = 943 + r$ avec $0 \leq r \leq 22$. Les valeurs possibles de a sont les 23 entiers de 943 à 965.
3. $a = 7q + r$ avec $q = r$ et $0 \leq r \leq 6$, donc $a = 8r$. Comme $a \neq 0$, $r \in \{1\,;\ldots\,;6\}$: $a \in \{8\,;16\,;24\,;32\,;40\,;48\}$. Par exemple $48 = 7 \times 6 + 6$.
4. a. Si $n = 2k$, $n^2 = 4k^2$: le reste est 0. Si $n = 2k+1$, $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2+k) + 1$: le reste est 1.
b. Soit a et b deux entiers : $a^2 = 4k + r$ et $b^2 = 4k' + r'$ avec r, $r' \in \{0\,;1\}$. Alors $a^2 + b^2 = 4(k + k') + (r + r')$ avec $r + r' \in \{0\,;1\,;2\}$. Comme $0 \leq r + r' < 4$, c'est le reste de $a^2 + b^2$ dans la division par 4 : il ne vaut jamais 3.
c. $2\,027 = 4 \times 506 + 3$: son reste est 3, donc $2\,027$ **n'est pas la somme de deux carrés**.

Leçon 2 : congruences

Exercice 3

1. a. $100 = 7 \times 14 + 2$: reste 2.
   b. $-45 = 7 \times (-7) + 4$: reste 4.
   c. $2\,026 = 7 \times 289 + 3$ et $1\,999 = 7 \times 285 + 4$, donc $2\,026 \times 1\,999 \equiv 3 \times 4 = 12 \equiv 5\ [7]$: reste 5.
   d. $2\,026^3 \equiv 3^3 = 27 = 7 \times 3 + 6$, donc $2\,026^3 \equiv 6\ [7]$: reste 6.
2. a. On multiplie chaque reste par 3 et on réduit modulo 7 :

k	0	1	2	3	4	5	6
reste de 3^k modulo 7	1	3	2	6	4	5	1

   b. $3^6 \equiv 1\ [7]$ et $2\,027 = 6 \times 337 + 5$, donc $3^{2\,027} = (3^6)^{337} \times 3^5 \equiv 3^5 \equiv 5\ [7]$: **reste** 5.
   c. Écrivons $n = 6m + r$ avec $0 \leq r \leq 5$. Alors $3^n = (3^6)^m \times 3^r \equiv 3^r\ [7]$. D'après le tableau, parmi $r = 0, \ldots, 5$, seul $r = 0$ donne le reste 1. Donc $3^n \equiv 1\ [7]$ si, et seulement si, n **est un multiple de** 6 , c'est-à-dire $n = 6m$ avec $m \in \mathbb{N}$.
   d. $3^{6n+2} = (3^6)^n \times 3^2 \equiv 9 \equiv 2\ [7]$, donc $3^{6n+2} + 5 \equiv 7 \equiv 0\ [7]$.
3. $3^{2n+1} = 3 \times 9^n$ et $9 \equiv 2\ [7]$, donc $3^{2n+1} \equiv 3 \times 2^n\ [7]$. D'autre part $2^{n+2} = 4 \times 2^n$. Donc

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 3 \times 2^n + 4 \times 2^n = 7 \times 2^n \equiv 0\ [7].$$

Exercice 4

SenAcad, une solution de BarroTech

1. a. $365 = 7 \times 52 + 1$: on avance d'un jour. **Le 4 novembre 2027 est un jeudi.**
   b. $500 = 7 \times 71 + 3$: on avance de 3 jours à partir du mercredi. **Ce sera un samedi** (le 18 mars 2028).
2. a. $10 - 1 = 9$ est un multiple de 9, donc $10 \equiv 1\ [9]$. $10 - (-1) = 11$ est un multiple de 11, donc $10 \equiv -1\ [11]$.
   b. La somme des chiffres vaut $1 + 2 + \cdots + 9 = 45 \equiv 0\ [9]$: **le reste par** 9 **est** 0. La somme alternée, en partant des unités, vaut $9 - 8 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = 5$: **le reste par** 11 **est** 5.
3. a. Somme alternée de $207\,315$, en partant des unités : $5 - 1 + 3 - 7 + 0 - 2 = -2$, et $-2 \equiv 9\ [11]$. **La clé est** $K = 9$. Vérification : $207\,315 = 11 \times 18\,846 + 9$.
   b. On a $N \equiv S\ [11]$, où S est la somme alternée des chiffres. Soit a le chiffre de rang i (compté à partir de 0 pour les unités) et b celui de rang $i + 1$, avec $a \neq b$. Dans S, ils apparaissent comme $(-1)^i a + (-1)^{i+1} b$. Après l'échange, la nouvelle somme S' vérifie

$$S' - S = (-1)^i (b - a) + (-1)^{i+1} (a - b) = 2\,(-1)^i\,(b - a).$$

   Comme a et b sont deux chiffres différents, $S' - S$ est un entier **pair et non nul** compris entre -18 et 18. Les seuls multiples de 11 de cet intervalle sont -11, 0 et 11 : $S' - S$ n'en fait pas partie. Donc $N' - N \equiv S' - S \not\equiv 0\ [11]$: le numéro saisi N' n'a pas le même reste que N, sa clé est différente de K, et **l'erreur est détectée**.
   c. Modulo 9, un nombre est congru à la somme de ses chiffres. Échanger deux chiffres ne change pas cette somme, donc ne change pas le reste par 9 : la clé reste la même et **l'erreur n'est jamais détectée**. C'est pourquoi on préfère une clé modulo 11.

Leçon 3 : PGCD et algorithme d'Euclide

Exercice 5

1. $1\,053 = 325 \times 3 + 78$; $325 = 78 \times 4 + 13$; $78 = 13 \times 6 + 0$. Le dernier reste non nul est 13 : $\text{PGCD}(1\,053\,;325) = 13$.
2. Les diviseurs communs positifs sont les diviseurs de 13 : 1 **et** 13. On divise par 13 : $1\,053 = 13 \times 81$ et $325 = 13 \times 25$, donc $\dfrac{1\,053}{325} = \dfrac{81}{25}$, irréductible car $81 = 3^4$ et $25 = 5^2$ sont premiers entre eux.
3. Le nombre de lots divise $1\,053$ et 325 ; le plus grand possible est 13 **lots**, chacun contenant 81 **cahiers et** 25 **livres**.
4. $\text{PGCD}(1\,053\,;325\,;30) = \text{PGCD}(13\,;30) = 1$ ($30 = 13 \times 2 + 4$, $13 = 4 \times 3 + 1$). Mais les trois nombres ne sont **pas** premiers entre eux deux à deux : $\text{PGCD}(1\,053\,;325) = 13$, $\text{PGCD}(325\,;30) = 5$ et $\text{PGCD}(1\,053\,;30) = 3$. Un PGCD égal à 1 pour trois nombres ne suffit pas.

Exercice 6

1. Un diviseur positif commun d de $2n+1$ et $2n+3$ divise leur différence 2 : $d = 1$ ou $d = 2$. Or $2n+1$ est impair, donc $d \neq 2$. Ainsi $\text{PGCD}(2n+1\,;2n+3) = 1$.
2. a. $d = \text{PGCD}(a\,;b)$ divise $a - 2b = (2n+7) - (2n+4) = 3$.
   b. Donc $d = 1$ ou $d = 3$. Si 3 divise $b = n+2$, il divise aussi $a = 2b+3$, et $d = 3$; sinon $d = 1$. Or $3 \mid n+2$ équivaut à $n \equiv -2 \equiv 1\ [3]$. $\text{PGCD}(a\,;b) = 3$ **si, et seulement si,** $n = 3k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Exemple : $n = 1$ donne $a = 9$, $b = 3$; $n = 0$ donne $a = 7$, $b = 2$, premiers entre eux.
3. $\text{PGCD}(2\,400\,;3\,600) = 100 \times \text{PGCD}(24\,;36) = 100 \times 12 = 1\,200$.
4. Posons $a = 12a'$ et $b = 12b'$ avec $\text{PGCD}(a'\,;b') = 1$ et $a' < b'$. Alors $12(a'+b') = 96$, donc $a'+b' = 8$. Les couples possibles sont $(1\,;7)$, $(2\,;6)$ et $(3\,;5)$; on écarte $(2\,;6)$, dont le PGCD vaut 2. **Solutions :** $(12\,;84)$ **et** $(36\,;60)$**.** Vérification : $\text{PGCD}(12\,;84) = \text{PGCD}(36\,;60) = 12$.

Leçon 4 : identité de Bézout et théorème de Gauss

Exercice 7

1. $59 = 27 \times 2 + 5$; $27 = 5 \times 5 + 2$; $5 = 2 \times 2 + 1$; $2 = 1 \times 2 + 0$. Le dernier reste non nul est 1 : 59 **et** 27 **sont premiers entre eux**. On remonte :

   $1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2(27 - 5 \times 5) = 11 \times 5 - 2 \times 27 = 11(59 - 2 \times 27) - 2 \times 27 = 11 \times 59 - 24 \times 27.$

   $u = 11$ **et** $v = -24$**.** Vérification : $649 - 648 = 1$.
2. $27 \times (-24) = 1 - 11 \times 59$, donc $27 \times (-24) \equiv 1\ [59]$. Or $-24 \equiv 35\ [59]$: $x = 35$. Vérification : $27 \times 35 = 945 = 59 \times 16 + 1$.
3. $3(2n+3) - 2(3n+4) = 6n + 9 - 6n - 8 = 1$, c'est-à-dire $(3n+4) \times (-2) + (2n+3) \times 3 = 1$. D'après le théorème de Bézout, $3n+4$ et $2n+3$ sont premiers entre eux.
4. Il existe u et v tels que $au + bv = 1$. Alors $a(u - v) + (a+b)v = au - av + av + bv = 1$: d'après le théorème de Bézout, a et $a+b$ sont premiers entre eux.

Exercice 8

1. 22 divise $15x$ et $\text{PGCD}(22\,;15)=1$: d'après le théorème de Gauss, 22 divise x, donc $x=22k$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Alors $15\times 22k=22y$, d'où $y=15k$. Réciproquement, $15\times 22k=22\times 15k$. **Solutions :** $(22k\,;15k)$**,** $k\in\mathbb{Z}$**.**
2. Parmi n et $n+1$, l'un est pair : 2 divise le produit. Les trois entiers consécutifs n, $n+1$, $n+2$ ont pour restes par 3 les nombres 0, 1 et 2 dans un certain ordre : l'un d'eux est un multiple de 3, donc 3 divise le produit. Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, 6 **divise** $n(n+1)(n+2)$.
3. a. 4 et 9 divisent n, et $\text{PGCD}(4\,;9)=1$: donc $4\times 9=36$ divise n.
   b. **Non** : 12 est divisible par 4 et par 6, mais pas par 24. Ici 4 et 6 ne sont pas premiers entre eux ($\text{PGCD}(4\,;6)=2$).
4. $7\mid 4n+3$ équivaut à $4n+3\equiv 0\ [7]$, soit $4n\equiv -3\equiv 4\ [7]$, c'est-à-dire $7\mid 4(n-1)$. Comme $\text{PGCD}(7\,;4)=1$, le théorème de Gauss donne $7\mid n-1$. Réciproquement, si $n=1+7k$, alors $4n+3=7+28k=7(1+4k)$. **Solutions :** $n=1+7k$**,** $k\in\mathbb{Z}$**.**

Leçon 5 : équations du type $ax+by=c$

Exercice 9

1. $\text{PGCD}(21\,;15)=3$ ne divise pas 4 : pas de solution. (Le membre de gauche est toujours un multiple de 3.)
2. 3 divise 6 ; on divise par 3 : $7x+5y=2$, avec $\text{PGCD}(7\,;5)=1$. Solution particulière : $7\times 1+5\times(-1)=2$. Si $(x\,;y)$ est solution, $7(x-1)=5(-1-y)$; 5 divise $7(x-1)$ et est premier avec 7, donc $x-1=5k$; alors $7\times 5k=5(-1-y)$, d'où $y=-1-7k$. Réciproquement, $7(1+5k)+5(-1-7k)=2$. **Solutions :** $(1+5k\,;-1-7k)$**,** $k\in\mathbb{Z}$**.**
3. a. $23=9\times 2+5$; $9=5\times 1+4$; $5=4\times 1+1$; $4=1\times 4+0$. On remonte :
   $$1=5-4=5-(9-5)=2\times 5-9=2\,(23-2\times 9)-9=23\times 2+9\times(-5).$$
   $(2\,;-5)$ est solution de $23x+9y=1$; en multipliant par 3, $(6\,;-15)$ **est solution de** $23x+9y=3$ ($138-135=3$).
   b. $23(x-6)=9(-15-y)$; 9 divise $23(x-6)$ et est premier avec 23, donc $x=6+9k$, puis $y=-15-23k$. Réciproquement, $23(6+9k)+9(-15-23k)=3$. **Solutions :** $(6+9k\,;-15-23k)$**,** $k\in\mathbb{Z}$**.**
   c. $0\leq 6+9k\leq 30$ équivaut à $-\dfrac{2}{3}\leq k\leq\dfrac{8}{3}$, soit $k\in\{0\,;1\,;2\}$: $(6\,;-15)$**,** $(15\,;-38)$ **et** $(24\,;-61)$.

Exercice 10

1. a. $400x + 250y = 4\,500$; en divisant par 50 : $8x + 5y = 90$.
   b. $\text{PGCD}(8\,;5) = 1$ et $(0\,;18)$ est une solution particulière. $8x = 5(18 - y)$: 5 divise $8x$ et est premier avec 8, donc $x = 5k$, puis $y = 18 - 8k$. Réciproquement, $8 \times 5k + 5(18 - 8k) = 90$. Les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ sont $(5k\,;18 - 8k)$. Ici $x \geq 0$ et $y \geq 0$, donc $0 \leq k \leq 2$: $(0\,;18)$**,** $(5\,;10)$ **et** $(10\,;2)$.
   c. Avec au moins un adulte et plus d'élèves que d'adultes, il reste 5 **adultes et** 10 **élèves**.
   Vérification : $5 \times 400 + 10 \times 250 = 2\,000 + 2\,500 = 4\,500$.
2. a. $4 \times 7 = 28 \equiv 1\ [9]$. Si $4x \equiv 3\ [9]$, en multipliant par 7 : $28x \equiv 21$, soit $x \equiv 3\ [9]$. Réciproquement, $4 \times 3 = 12 \equiv 3\ [9]$. **Solutions :** $x = 3 + 9k$**,** $k \in \mathbb{Z}$**.**
   b. Tableau des restes :

x **modulo** 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$6x$ modulo 10	0	6	2	8	$\mathbf{4}$	0	6	2	8	$\mathbf{4}$

   Solutions : $x \equiv 4\ [10]$ **ou** $x \equiv 9\ [10]$, c'est-à-dire $x \equiv 4\ [5]$. Ici 6 et 10 ne sont pas premiers entre eux : il n'y a pas d'« inverse » de 6 modulo 10, et l'on obtient deux restes modulo 10.
   c. D'après le tableau, $6x$ est toujours congru à un nombre pair modulo 10 : **pas de solution**.
   (Autre argument : $6x - 5$ est impair, il ne peut pas être un multiple de 10.)
3. a. $17 = 7 \times 2 + 3$ et $17 = 5 \times 3 + 2$: $17 \equiv 3\ [7]$ et $17 \equiv 2\ [5]$.
   b. $N \equiv 3 \equiv 17\ [7]$, donc 7 divise $N - 17$; $N \equiv 2 \equiv 17\ [5]$, donc 5 divise $N - 17$. Comme 5 et 7 sont premiers entre eux, 35 divise $N - 17$.
   c. $N = 17 + 35k$, et $150 \leq N \leq 190$ donne $133 \leq 35k \leq 173$, donc $k = 4$: $N = 157$. Vérification : $157 = 7 \times 22 + 3 = 5 \times 31 + 2$.

SemAcad, une solution de Barrotech

Leçon 6 : nombres premiers et décomposition

Exercice 11

1. $\sqrt{401} \approx 20{,}02$: on teste les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. 401 est impair, la somme de ses chiffres vaut 5 (pas divisible par 3), il ne finit ni par 0 ni par 5, et $401 = 7 \times 57 + 2 = 11 \times 36 + 5 = 13 \times 30 + 11 = 17 \times 23 + 10 = 19 \times 21 + 2$. 401 **est premier.** En revanche, $403 = 13 \times 31$ **n'est pas premier.**
2. $1\,980 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$ et $756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$.
3. Les facteurs premiers communs sont 2 et 3, avec les plus petits exposants 2 et 2 : $\text{PGCD}(1\,980\,;756) = 2^2 \times 3^2 = 36$.
4. $1\,980$ a $(2+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 36$ diviseurs positifs.
5. Un carré a tous ses exposants pairs. Dans $1\,980 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$, il manque un facteur 5 et un facteur 11 : k doit être un multiple de $5 \times 11 = 55$, et $k = 55$ convient, puisque $1\,980 \times 55 = 108\,900 = 330^2$ est bien un carré.

Leçon 7 : PPCM et petit théorème de Fermat

Exercice 12

1. $8 = 2^3$, $14 = 2 \times 7$, $21 = 3 \times 7$, donc $\mathrm{PPCM}(8\,;14\,;21) = 2^3 \times 3 \times 7 = 168$. **Ils repasseront ensemble dans** 168 **jours.**
2. On prend tous les facteurs premiers avec le plus grand exposant : $\mathrm{PPCM}(1\,980\,;756) = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 = 41\,580$. Vérification : $36 \times 41\,580 = 1\,496\,880 = 1\,980 \times 756$.
3. Posons $a = 12a'$ et $b = 12b'$ avec $\mathrm{PGCD}(a'\,;b') = 1$. Alors $\mathrm{PPCM}(a\,;b) = 12\,a'b'$ (ou bien : $ab = 12 \times 360$), donc $a'b' = 30$ avec $a' < b'$ premiers entre eux : $(1\,;30)$, $(2\,;15)$, $(3\,;10)$, $(5\,;6)$. **Solutions :** $(12\,;360)$**,** $(24\,;180)$**,** $(36\,;120)$ **et** $(60\,;72)$**.**
4. a. 11 est premier et ne divise pas 2, donc $2^{10} \equiv 1\ [11]$. $2\,026 = 10 \times 202 + 6$, donc $2^{2\,026} \equiv 2^6 = 64 = 11 \times 5 + 9\ [11]$: **reste** 9.
   b. 7 est premier : d'après le petit théorème de Fermat, $n^7 \equiv n\ [7]$, donc 7 divise $n^7 - n$.
   c. $(n-1)\,n\,(n+1) = n^3 - n$, et $(n^3 - n)(n^4 + n^2 + 1) = n^7 + n^5 + n^3 - n^5 - n^3 - n = n^7 - n$. Le produit $(n-1)n(n+1)$ de trois entiers consécutifs est divisible par 6 (exercice 8), donc 6 divise $n^7 - n$. Comme 7 divise aussi $n^7 - n$ et que 6 et 7 sont premiers entre eux, 42 **divise** $n^7 - n$.

Leçon 8 : systèmes de numération

Exercice 13

SenAcad, une solution de BarroTech

1. $\overline{110101}^{\,2} = 32 + 16 + 4 + 1 = 53$; $\overline{2041}^{\,5} = 2 \times 125 + 0 \times 25 + 4 \times 5 + 1 = 271$; $\overline{1\mathrm{A}3}^{\,16} = 256 + 10 \times 16 + 3 = 419$; $\overline{\mathrm{FF}}^{\,16} = 15 \times 16 + 15 = 255$.
2. Divisions successives :
   - par 2 : $300 = 2 \times 150 + 0$; $150 = 2 \times 75 + 0$; $75 = 2 \times 37 + 1$; $37 = 2 \times 18 + 1$; $18 = 2 \times 9 + 0$; $9 = 2 \times 4 + 1$; $4 = 2 \times 2 + 0$; $2 = 2 \times 1 + 0$; $1 = 2 \times 0 + 1$. $300 = \overline{100101100}^{\,2}$ $(256 + 32 + 8 + 4)$;
   - par 5 : $300 = 5 \times 60 + 0$; $60 = 5 \times 12 + 0$; $12 = 5 \times 2 + 2$; $2 = 5 \times 0 + 2$. $300 = \overline{2200}^{\,5}$ $(250 + 50)$;
   - par 16 : $300 = 16 \times 18 + 12$; $18 = 16 \times 1 + 2$; $1 = 16 \times 0 + 1$. $300 = \overline{12\mathrm{C}}^{\,16}$ $(256 + 32 + 12)$.
3. $\overline{1011\ 1011}^{\,2}$: chaque paquet 1011 vaut $8 + 2 + 1 = 11 = \mathrm{B}$. $\overline{10111011}^{\,2} = \overline{\mathrm{BB}}^{\,16} = 11 \times 16 + 11 = 187$**.**
4. a. $\overline{1111111111}^{\,2} = 2^9 + 2^8 + \cdots + 1 = 2^{10} - 1 = 1\,023$.
   b. Un entier qui s'écrit avec k chiffres en base deux est compris entre 2^{k-1} et $2^k - 1$. Or $2^9 = 512 \leq 1\,000 < 1\,024 = 2^{10}$: $1\,000$ **s'écrit avec** 10 **chiffres** ($1\,000 = \overline{1111101000}^{\,2}$).

Exercice 14

1. $45 = 5 \times 9$ avec 5 et 9 premiers entre eux : N est divisible par 45 si, et seulement si, il l'est par 5 et par 9. Par 5 : $y = 0$ ou $y = 5$. Par 9 : $3 + x + 1 + y \equiv 0\ [9]$.
   - Si $y = 0$: $x + 4 \equiv 0\ [9]$, donc $x = 5$.
   - Si $y = 5$: $x + 9 \equiv 0\ [9]$, donc $x = 0$ ou $x = 9$.

   $N \in \{3\,510\,;3\,015\,;3\,915\}$, et en effet $3\,510 = 45 \times 78$, $3\,015 = 45 \times 67$, $3\,915 = 45 \times 87$.
2. a. $5 \equiv 1\ [4]$, donc $5^i \equiv 1\ [4]$ pour tout i, et $\overline{a_k \dots a_0}^{\,5} = \sum a_i\, 5^i \equiv \sum a_i\ [4]$.
   b. $4 + 3 + 2 + 1 = 10 \equiv 2\ [4]$: **le reste est** 2. Vérification : $\overline{4321}^{\,5} = 4 \times 125 + 3 \times 25 + 2 \times 5 + 1 = 586 = 4 \times 146 + 2$.
3. a. $2 - (-1) = 3$, donc $2 \equiv -1\ [3]$.
   b. Alors $2^i \equiv (-1)^i\ [3]$, et $\overline{a_k \dots a_1 a_0}^{\,2} = \sum a_i\, 2^i \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \dots\ [3]$.
   c. Pour $\overline{110101}^{\,2}$, en partant des unités : $1 - 0 + 1 - 0 + 1 - 1 = 2$, donc ce nombre est congru à 2 modulo 3 (en effet $53 = 3 \times 17 + 2$). Pour $\overline{1001}^{\,2}$: $1 - 0 + 0 - 1 = 0$, donc il est divisible par 3 (en effet $\overline{1001}^{\,2} = 9$).

SenAcad, une solution de BarroTech