Exercices

TERMINALE S · CHAPITRE 7 · NOMBRES COMPLEXES ET SIMILITUDES

Exercices classés par leçon, du plus simple au plus complet. Les exercices 12 et 13 sont réservés aux séries S1, S3 et S1A. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Les corrigés détaillés sont dans la fiche « Corrigés ».

Leçon 1 : forme algébrique et conjugué

Exercice 1 : calculer dans C

1. Écrire sous forme algébrique :
   a. $(2-3i)(4+i)$ b. $(1-2i)^2$ c. $(1+i)^3$ d. i^{2026}
   e. $\dfrac{1}{2+i}$ f. $\dfrac{4+3i}{2-i}$ g. $\dfrac{1+i}{1-i}$
2. Donner la partie réelle et la partie imaginaire de $z=\dfrac{2+i}{1+3i}$.

Exercice 2 : conjugué et équations

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, et donner les solutions sous forme algébrique.
   a. $(2-i)z=1+3i$ b. $3z-2i=iz+1$ c. $z+2\overline{z}=6-i$
2. Démontrer que, pour tout complexe z, le nombre $z^2+\overline{z}^2$ est réel et le nombre $z-\overline{z}$ est imaginaire pur.
3. Soit $z=3-2i$. Calculer $z\,\overline{z}$, puis en déduire sans long calcul la forme algébrique de $\dfrac{1}{z}$.

Leçon 2 : le plan complexe, module et argument

Exercice 3 : module, argument, forme trigonométrique

1. Donner le module et un argument de chacun des nombres suivants, puis leur forme trigonométrique.
   a. -3 b. $2i$ c. $1-i$ d. $-\sqrt{3}+i$ e. $-2-2i\sqrt{3}$ f. $5+5i$
2. On donne $A(-1+2i)$ et $B(3-i)$. Calculer la distance AB et l'affixe du milieu I de $[AB]$.
3. Sans calculer sa forme algébrique, déterminer le module de $\dfrac{(3+4i)^2}{(1-i)^3}$.
4. Le nombre $z=-4\left(\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$ est-il écrit sous forme trigonométrique ? Donner son module et son argument principal.
5. On donne $A(1+i)$ et $B\left(1+\sqrt{3}+2i\right)$. Déterminer la distance AB et une mesure de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)$.

Leçon 3 : forme exponentielle, formule de Moivre, racines n-ièmes

Exercice 4 : forme exponentielle et formule de Moivre

1. On pose $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = -2 + 2i$.
   a. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
   b. En déduire la forme exponentielle de $z_1 z_2$, de $\dfrac{z_1}{z_2}$ (avec l'argument principal) et de z_1^6.
2. Calculer $(1-i)^{10}$ à l'aide de la forme exponentielle.
3. Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ est un réel, puis ceux pour lesquels il est imaginaire pur.
4. Écrire $(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

Exercice 5 : racines n-ièmes

1. Donner les racines sixièmes de l'unité sous forme algébrique. Quelle figure forment leurs images ?
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -8$. Donner les solutions sous forme exponentielle et sous forme algébrique.
3. On pose $Z = -8 + 8i\sqrt{3}$.
   a. Écrire Z sous forme exponentielle.
   b. Résoudre l'équation $z^4 = Z$. Donner les solutions sous forme algébrique.
   c. Montrer que leurs images sont les sommets d'un carré dont on précisera le centre et la longueur de la diagonale.
4. Déterminer les racines carrées de $2i$ en utilisant la forme exponentielle.

SanAcad une solution de BarroTech

Leçon 4 : formules d'Euler et trigonométrie

Exercice 6 : linéariser, établir des formules

1. À l'aide des formules d'Euler, linéariser :
   a. $\sin^3 x$ b. $\cos^2 x \sin x$ c. $\sin(3x)\cos(2x)$
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x \, dx$. Retrouver ce résultat avec une primitive de la forme $u'u^2$.
3. a. À l'aide du triangle de Pascal, linéariser $\cos^4 x$.
   b. En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx$.
4. a. À l'aide de la formule de Moivre et du binôme de Newton, exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
   b. En déduire que $\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

Leçon 5 : équations dans C

Exercice 7 : racines carrées et second degré

1. Déterminer les racines carrées de :
   a. -16 b. $5+12i$ c. $-3-4i$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
   a. $z^2+z+1=0$ b. $2z^2-6z+5=0$ c. $z^2-2iz-1=0$
   d. $z^2-(3-2i)z+5-i=0$ e. $z^4+3z^2-4=0$
3. Factoriser dans $\mathbb{C}$: z^2+9 et z^2+2z+2.

Exercice 8 : une équation du troisième degré

Soit $P(z)=z^3-8iz^2-22z+20i$.

1. Calculer $P(2i)$.
2. Déterminer les complexes p et q tels que, pour tout complexe z, $P(z)=(z-2i)(z^2+pz+q)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.
4. On note A, B, C les points d'affixes $2i$, $1+3i$ et $-1+3i$.
   a. Calculer $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$. En déduire la nature du triangle ABC.
   b. Déterminer l'affixe du point D tel que $ABDC$ soit un carré.

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 6 : nombres complexes et géométrie

Exercice 9 : configurations et ensembles de points

1. On donne $A(1)$, $B(3)$ et $C\left(2+i\sqrt{3}\right)$. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
2. On donne $D(-1+2i)$, $E(1)$ et $F(3-2i)$. Montrer que D, E, F sont alignés et comparer DE et DF.
3. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que :
   a. $|z-2i|=3$ b. $|z+1|=|z-3i|$ (donner une équation cartésienne) c. $|\overline{z}+2-i|=1$
4. Pour $z \neq -1$, on pose $Z=\dfrac{z-i}{z+1}$, et on écrit $z=x+iy$ avec x et y réels.
   a. Montrer que $\mathrm{Re}(Z)=\dfrac{x^2+y^2+x-y}{(x+1)^2+y^2}$ et $\mathrm{Im}(Z)=\dfrac{y-x-1}{(x+1)^2+y^2}$.
   b. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que Z soit réel.
   c. Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M tels que Z soit imaginaire pur.
   d. On note $A'(-1)$ et $B'(i)$. Retrouver géométriquement les résultats de b et c à l'aide de l'argument de $Z=\dfrac{z-z_{B'}}{z-z_{A'}}$.

Leçon 7 : transformations et similitudes directes

Exercice 10 : reconnaître une similitude

SenAcad, une solution de BarroTech

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation d'écriture complexe :
   a. $z'=z+2-3i$ b. $z'=3z-4i$ c. $z'=-iz+1+i$ d. $z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z-i\sqrt{3}$
2. Donner l'écriture complexe de :
   a. la rotation de centre $\Omega(2-i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, puis l'image de O par cette rotation ;
   b. l'homothétie de centre $\Omega(1+i)$ et de rapport -3 ;
   c. la similitude directe de centre $\Omega(i)$, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
3. Déterminer l'image, par la similitude du 2.c, du cercle de centre $A(1)$ et de rayon 2.

Exercice 11 : une similitude et un triangle rectangle isocèle

On note B et C les points d'affixes 2 et $4+2i$.

1. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en B et B en C.
2. Déterminer le centre Ω, le rapport et l'angle de s.
3. Soit $M(z)$ un point distinct de Ω, et $M'(z')$ son image par s.
   a. Montrer que $\dfrac{z'-z}{\omega-z}=-i$, où ω est l'affixe de Ω.
   b. En déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.
   c. Vérifier ce résultat sur le triangle ΩOB.
4. Expliquer comment construire à la règle et au compas l'image M' d'un point M donné.

S1-S3 Exercices de la leçon 8

Exercice 12 : p cos x + q sin x, sommes et produits

1. Écrire sous la forme $r\cos(x-\varphi)$, avec $r>0$:
   a. $\cos x+\sin x$ b. $\cos x-\sqrt{3}\sin x$ c. $-\cos x+\sin x$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   a. $\cos x+\sin x=1$ b. $\cos x-\sqrt{3}\sin x=-1$ (donner aussi les solutions dans $]-\pi\,;\pi]$) c. $\cos x+\sin x=2$
3. Transformer $\cos(5x)+\cos x$ en produit, puis résoudre $\cos(5x)+\cos x=0$ dans $[0\,;\pi]$.
4. a. Linéariser $\sin^5 x$ (degré 5, limite du programme).
   b. En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx$.

Exercice 13 : sommes géométriques et cocyclicité (travaux dirigés)

1. Calculer $S=1+(1+i)+(1+i)^2+\cdots+(1+i)^7$.
2. Soit x un réel de $]0\,;2\pi[$ et n un entier naturel. On pose
   $$C_n=1+\cos x+\cos(2x)+\cdots+\cos(nx)\qquad S_n=\sin x+\sin(2x)+\cdots+\sin(nx).$$
   a. Montrer que $C_n+iS_n=\dfrac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$.
   b. À l'aide de l'angle moitié, montrer que $C_n+iS_n=\dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,e^{i\frac{nx}{2}}$.
   c. En déduire une expression de C_n et de S_n. Vérifier la formule de C_n pour $n=1$.
3. On rappelle que $\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ (cours, leçon 8). En déduire $\cos\dfrac{4\pi}{5}$, puis $\cos\dfrac{\pi}{5}$.
4. On donne $A(5)$, $B(3+4i)$, $C(-4+3i)$ et $D(-5)$.
   a. Calculer $\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_A}\times\dfrac{z_D-z_B}{z_C-z_B}$. En déduire que A, B, C, D sont cocycliques.
   b. Retrouver ce résultat en calculant $|z_A|$, $|z_B|$, $|z_C|$ et $|z_D|$.

SenAcad, une solution de SenTech