# Corrigés détaillés

TERMINALE S · CHAPITRE 7 · NOMBRES COMPLEXES ET SIMILITUDES

*Chaque résultat a été vérifié par calcul formel. Les rappels de méthode sont en italique.*

## Exercice 1

*On calcule comme avec des réels, en remplaçant $i^2$ par $-1$. Pour un quotient, on multiplie par le conjugué du dénominateur.*

1. a. $(2-3i)(4+i) = 8+2i-12i-3i^2 = 11-10i$.
   b. $(1-2i)^2 = 1-4i+4i^2 = -3-4i$.
   c. $(1+i)^2 = 2i$, donc $(1+i)^3 = 2i(1+i) = -2+2i$.
   d. $2026 = 4\times 506+2$ et $i^4=1$, donc $i^{2026} = i^2 = -1$.
   e. $\dfrac{1}{2+i} = \dfrac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{2-i}{5} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}\,i$.
   f. $\dfrac{4+3i}{2-i} = \dfrac{(4+3i)(2+i)}{5} = \dfrac{8+4i+6i+3i^2}{5} = \dfrac{5+10i}{5} = 1+2i$.
   g. $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2i}{2} = i$.
2. $z = \dfrac{(2+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \dfrac{2-6i+i-3i^2}{10} = \dfrac{5-5i}{10} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\,i$. Donc $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = -\dfrac{1}{2}$ (un réel, sans $i$).

## Exercice 2

1. a. $z = \dfrac{1+3i}{2-i} = \dfrac{(1+3i)(2+i)}{5} = \dfrac{2+i+6i+3i^2}{5} = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{7}{5}\,i$.
   b. $3z - iz = 1+2i$, soit $(3-i)z = 1+2i$, donc $z = \dfrac{(1+2i)(3+i)}{10} = \dfrac{3+i+6i+2i^2}{10} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{10}\,i$.
   c. *L'équation contient $\overline{z}$ : on pose $z = x+iy$.* Alors $z + 2\overline{z} = x+iy+2x-2iy = 3x - iy$. Par identification avec $6 - i$ : $3x = 6$ et $-y = -1$, donc $z = 2+i$. Vérification : $2+i+2(2-i) = 6-i$.
2. Avec les propriétés du conjugué : $\overline{z^2+\overline{z}^2} = \overline{z}^2 + z^2$, donc ce nombre est égal à son conjugué : il est **réel**. De même $\overline{z-\overline{z}} = \overline{z} - z = -(z-\overline{z})$ : ce nombre est égal à l'opposé de son conjugué, il est **imaginaire pur**. *Autre méthode : avec $z = a+ib$, $z^2+\overline{z}^2 = 2(a^2-b^2)$ et $z-\overline{z} = 2ib$.*
3. $z\,\overline{z} = 3^2+2^2 = 13$. Donc $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\,\overline{z}} = \dfrac{3+2i}{13} = \dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13}\,i$.

## Exercice 3

*Module $r = \sqrt{a^2+b^2}$, puis $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$.*

**Question 1.**

| $z$ | module | argument | forme trigonométrique |
|---|---|---|---|
| $-3$ | $3$ | $\pi$ | $3(\cos\pi + i\sin\pi)$ |
| $2i$ | $2$ | $\frac{\pi}{2}$ | $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ |
| $1-i$ | $\sqrt{2}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ |
| $-\sqrt{3}+i$ | $2$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ |
| $-2-2i\sqrt{3}$ | $4$ | $-\frac{2\pi}{3}$ | $4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ |
| $5+5i$ | $5\sqrt{2}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ |

Par exemple, pour $-\sqrt{3}+i$ : $r = \sqrt{3+1} = 2$, $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$, donc $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Pour $-2-2i\sqrt{3}$ : $r = \sqrt{4+12} = 4$, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.

**Question 2.** $AB = |z_B - z_A| = |4-3i| = \sqrt{16+9} = 5$ et $z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2} = \dfrac{2+i}{2} = 1 + \dfrac{1}{2}\,i$.

**Question 3.** $\left|\dfrac{(3+4i)^2}{(1-i)^3}\right| = \dfrac{|3+4i|^2}{|1-i|^3} = \dfrac{25}{\left(\sqrt{2}\right)^3} = \dfrac{25}{2\sqrt{2}} = \dfrac{25\sqrt{2}}{4}$.

SenAcad, une solution de BacoTech

**Question 4.** Non : le facteur $-4$ est négatif. Avec $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, on a $z = 4\left(\cos\dfrac{8\pi}{7} + i\sin\dfrac{8\pi}{7}\right)$. Le module vaut $4$ et l'argument principal est $\dfrac{8\pi}{7} - 2\pi = -\dfrac{6\pi}{7}$.

**Question 5.** $z_B - z_A = \sqrt{3} + i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$. Donc $AB = 2$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

## Exercice 4

1. a. $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ : $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. $|z_2| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ : $z_2 = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
   b. *Les modules se multiplient, les arguments s'ajoutent.*
   - $z_1 z_2 = 4\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}$.
   - $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{13\pi}{12}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$, car $-\dfrac{13\pi}{12} + 2\pi = \dfrac{11\pi}{12}$ est dans $]-\pi\,;\pi]$.
   - $z_1^6 = 2^6\,e^{-i\frac{6\pi}{3}} = 64\,e^{-2i\pi} = 64$.
2. $1 - i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$, donc $(1-i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10} e^{-i\frac{10\pi}{4}} = 32\,e^{-i\frac{5\pi}{2}} = 32\,e^{-i\frac{\pi}{2}} = -32i$. *Contrôle :* $(1-i)^2 = -2i$ *et* $(-2i)^5 = -32\,i^5 = -32i$.
3. $\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, donc $\left(\sqrt{3}+i\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.
   - Il est réel si et seulement si $\dfrac{n\pi}{6} = k\pi$ ($k$ entier), soit $n = 6k$ : $n$ **multiple de** $6$.
   - Il est imaginaire pur si et seulement si $\dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, soit $n = 3 + 6k$ : $n = 3, 9, 15, \ldots$ Par exemple $\left(\sqrt{3}+i\right)^3 = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i$.
4. Forme algébrique : $(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right) = 1 + i\sqrt{3} + i - \sqrt{3} = \left(1-\sqrt{3}\right) + i\left(1+\sqrt{3}\right)$.
   Forme exponentielle : $\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$.
   En identifiant avec $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ :

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \qquad \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

SenAcad, une solution de BarroTech

## Exercice 5

1. Les racines sixièmes de l'unité sont $e^{i\frac{k\pi}{3}}$, $k = 0, \ldots, 5$ :

$$1 \qquad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad -1 \qquad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

   Leurs images sont les sommets d'un **hexagone régulier** inscrit dans le cercle trigonométrique.
2. $-8 = 8e^{i\pi}$. Avec $z = r\,e^{i\theta}$ : $r^3 = 8$ et $3\theta = \pi + 2k\pi$, donc $r = 2$ et $\theta = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$, $k \in \{0, 1, 2\}$ :

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3} \qquad z_1 = 2e^{i\pi} = -2 \qquad z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}.$$

3. a. $|Z| = \sqrt{64 + 192} = 16$, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ : $Z = 16\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
   b. $r^4 = 16$ et $4\theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, donc $r = 2$ et $\theta = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ :

$$2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i \qquad 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3} \qquad 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i \qquad 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}.$$

   c. Les quatre points sont sur le cercle de centre $O$ et de rayon $2$, et deux points consécutifs sont séparés d'un angle $\frac{\pi}{2}$ : ce sont les sommets d'un **carré de centre** $O$, dont les diagonales mesurent $2 \times 2 = 4$.
4. $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. Les racines carrées sont $\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$ et son opposé $-1 - i$. *Contrôle :* $(1+i)^2 = 2i$.

## Exercice 6

1. a. $(2i)^3 = -8i$, donc

$$\sin^3 x = \frac{\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3}{-8i} = \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} = \frac{2i\sin(3x) - 6i\sin x}{-8i} = \frac{3\sin x - \sin(3x)}{4}.$$

   b. $\cos^2 x \sin x = \dfrac{\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right)\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)}{8i} = \dfrac{e^{3ix} + e^{ix} - e^{-ix} - e^{-3ix}}{8i} = \dfrac{\sin(3x) + \sin x}{4}$.
   c. $\sin(3x)\cos(2x) = \dfrac{\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right)\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right)}{4i} = \dfrac{e^{5ix} + e^{ix} - e^{-ix} - e^{-5ix}}{4i} = \dfrac{\sin(5x) + \sin x}{2}$.

2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x\,dx = \frac{1}{4}\left[-\frac{\cos(3x)}{3} - \cos x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{3}+1\right) - \left(-\frac{1}{3}-1\right)\right] = \frac{1}{4}\times\frac{8}{3} = \frac{2}{3}$.
   Avec $u = \cos x$, $u' = -\sin x$ : $\cos^2 x \sin x = -u'u^2$, et $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x\,dx = \left[-\frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

3. a. Ligne 4 du triangle de Pascal : $1, 4, 6, 4, 1$.
$$\cos^4 x = \frac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^4}{16} = \frac{e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}}{16} = \frac{\cos(4x)+4\cos(2x)+3}{8}.$$
   b. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4 x\,dx = \frac{1}{8}\left[\frac{\sin(4x)}{4} + 2\sin(2x) + 3x\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi}{8}$.

4. a. Avec $c = \cos x$, $s = \sin x$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ :
$$\cos(4x) + i\sin(4x) = (c+is)^4 = c^4 + 4ic^3s - 6c^2s^2 - 4ics^3 + s^4.$$
   Par identification : $\cos(4x) = c^4 - 6c^2s^2 + s^4$ et $\sin(4x) = 4c^3s - 4cs^3$.
   b. Avec $s^2 = 1 - c^2$ : $\cos(4x) = c^4 - 6c^2(1-c^2) + (1-c^2)^2 = c^4 - 6c^2 + 6c^4 + 1 - 2c^2 + c^4 = 8c^4 - 8c^2 + 1$.

## Exercice 7

1. a. $-16 = (4i)^2$ : les racines carrées sont $4i$ et $-4i$.
   b. $x^2 - y^2 = 5$, $x^2 + y^2 = |5 + 12i| = 13$, $2xy = 12$. Donc $x^2 = 9$, $y^2 = 4$, et $xy > 0$ : $3 + 2i$ et $-3 - 2i$.
   c. $x^2 - y^2 = -3$, $x^2 + y^2 = |-3 - 4i| = 5$, $2xy = -4$. Donc $x^2 = 1$, $y^2 = 4$, et $xy < 0$ : $1 - 2i$ et $-1 + 2i$.

2. a. $\Delta = 1 - 4 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$ : $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ ou $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ (ce sont $j^2$ et $j$).
   b. $\Delta = 36 - 40 = -4 = (2i)^2$ : $z = \dfrac{6 \pm 2i}{4}$, soit $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,i$ ou $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,i$.
   c. $\Delta = (-2i)^2 - 4\times(-1) = -4 + 4 = 0$ : une solution double, $z_0 = \dfrac{2i}{2} = i$. En effet $z^2 - 2iz - 1 = (z-i)^2$.
   d. $\Delta = (3-2i)^2 - 4(5-i) = 9 - 12i - 4 - 20 + 4i = -15 - 8i$. Racines carrées de $\Delta$ : $x^2 - y^2 = -15$, $x^2 + y^2 = 17$, $2xy = -8$, d'où $\delta = 1 - 4i$. Donc
$$z_1 = \frac{3 - 2i - (1-4i)}{2} = 1 + i \qquad z_2 = \frac{3 - 2i + 1 - 4i}{2} = 2 - 3i.$$
   *Contrôle :* $z_1 + z_2 = 3 - 2i$ *et* $z_1 z_2 = 2 - 3i + 2i + 3 = 5 - i$.
   e. On pose $Z = z^2$ : $Z^2 + 3Z - 4 = 0$, d'où $Z = 1$ ou $Z = -4$. Puis $z^2 = 1$ donne $z = \pm 1$, et $z^2 = -4$ donne $z = \pm 2i$. Quatre solutions : $1$, $-1$, $2i$, $-2i$.

3. $z^2 + 9 = z^2 - (3i)^2 = (z - 3i)(z + 3i)$. Pour $z^2 + 2z + 2$ : $\Delta = -4$, racines $-1 + i$ et $-1 - i$, donc $z^2 + 2z + 2 = (z + 1 - i)(z + 1 + i)$.

## Exercice 8

1. $(2i)^2 = -4$ et $(2i)^3 = -8i$. Donc $P(2i) = -8i - 8i \times (-4) - 44i + 20i = -8i + 32i - 44i + 20i = 0$.

2. $(z - 2i)(z^2 + pz + q) = z^3 + (p - 2i)z^2 + (q - 2ip)z - 2iq$. Par identification avec $P$ :
$$p - 2i = -8i \qquad q - 2ip = -22 \qquad -2iq = 20i.$$
   D'où $p = -6i$, $q = -10$, et le contrôle $q - 2ip = -10 - 2i(-6i) = -10 - 12 = -22$. Donc $P(z) = (z - 2i)(z^2 - 6iz - 10)$.

3. $z^2 - 6iz - 10 = 0$ : $\Delta = (-6i)^2 + 40 = -36 + 40 = 4 = 2^2$. Solutions : $\dfrac{6i - 2}{2} = -1 + 3i$ et $\dfrac{6i + 2}{2} = 1 + 3i$. Les solutions de $P(z) = 0$ sont $2i$, $1 + 3i$ et $-1 + 3i$.

4. a. $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-1 + i}{1 + i} = \dfrac{(-1+i)(1-i)}{2} = \dfrac{-1 + i + i - i^2}{2} = \dfrac{2i}{2} = i$. Donc $AC = AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ : le triangle $ABC$ est **rectangle isocèle en** $A$.
   b. $ABDC$ est un carré si et seulement si $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ (le triangle étant rectangle isocèle en $A$), soit $z_D = z_B + z_C - z_A = (1 + 3i) + (-1 + 3i) - 2i = 4i$.

SenAmad, une solution de BurroTech

## Exercice 9

1. $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc $AC = AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ : le triangle $ABC$ est équilatéral.
2. $\dfrac{z_F - z_D}{z_E - z_D} = \dfrac{4 - 4i}{2 - 2i} = 2$, qui est réel : $D$, $E$, $F$ sont alignés, et $DF = 2DE$ ($E$ est le milieu de $[DF]$).
3. a. Cercle de centre $\Omega(2i)$ et de rayon $3$.
   b. $|z - (-1)| = |z - 3i|$ : médiatrice de $[AB]$ avec $A(-1)$ et $B(3i)$. Avec $z = x + iy$ : $(x+1)^2 + y^2 = x^2 + (y-3)^2$, soit $2x + 1 = -6y + 9$, c'est-à-dire $x + 3y - 4 = 0$.
   c. Un complexe et son conjugué ont le même module : $|\overline{z} + 2 - i| = \left|\overline{z + 2 + i}\right| = |z + 2 + i| = |z - (-2 - i)|$. C'est le cercle de centre $\Omega'(-2 - i)$ et de rayon $1$.
4. a. On multiplie par le conjugué du dénominateur :
$$Z = \frac{\big(x + i(y-1)\big)\big((x+1) - iy\big)}{(x+1)^2 + y^2} = \frac{\big(x^2 + x + y^2 - y\big) + i\big(y - x - 1\big)}{(x+1)^2 + y^2}.$$
   b. $Z$ est réel $\iff y - x - 1 = 0$. $\mathcal{E}$ est la droite d'équation $y = x + 1$, privée du point $A'(-1)$ (pour lequel $Z$ n'est pas défini).
   c. $Z$ est imaginaire pur $\iff x^2 + y^2 + x - y = 0 \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. $\mathcal{F}$ est le cercle de centre $\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$, privé du point $A'(-1)$.
   d. Pour $M$ distinct de $A'$ et $B'$, $\arg Z = \left(\overrightarrow{MA'}, \overrightarrow{MB'}\right)\ [2\pi]$. $Z$ est réel (non nul) quand cet angle vaut $0$ ou $\pi$ : $M$ est sur la droite $(A'B')$. $Z$ est imaginaire pur (non nul) quand l'angle vaut $\pm\frac{\pi}{2}$ : $M$ est sur le cercle de diamètre $[A'B']$. Enfin $Z = 0$ pour $M = B'$, qui appartient aux deux ensembles. On retrouve bien la droite $(A'B')$, d'équation $y = x + 1$, et le cercle de diamètre $[A'B']$, de centre le milieu $\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{A'B'}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tous deux privés de $A'$.

## Exercice 10

1. a. $a = 1$ : translation de vecteur d'affixe $2 - 3i$.
   b. $a = 3$ est réel, différent de $1$ : homothétie de rapport $3$ et de centre $\omega = \dfrac{-4i}{1 - 3} = 2i$.
   c. $a = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, de module $1$ : rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre $\omega = \dfrac{1 + i}{1 + i} = 1$.
   d. $a = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ : similitude directe de rapport $2$, d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et de centre $\omega = \dfrac{-i\sqrt{3}}{1 - 1 - i\sqrt{3}} = \dfrac{-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = 1$.
2. a. $z' - (2 - i) = i\big(z - (2 - i)\big)$, soit $z' = iz - 2i - 1 + 2 - i = iz + 1 - 3i$. L'image de $O$ a pour affixe $1 - 3i$.
   b. $z' - (1 + i) = -3\big(z - (1 + i)\big)$, soit $z' = -3z + 4 + 4i$.
   c. $a = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$ : $z' - i = 2i(z - i)$, soit $z' = 2iz + 2 + i$.
3. La similitude multiplie les distances par $2$ : l'image est le cercle de centre $A'$, image de $A$, d'affixe $2i \times 1 + 2 + i = 2 + 3i$, et de rayon $2 \times 2 = 4$.

## Exercice 11

1. On cherche $s : z' = az + b$ avec $a \times 0 + b = 2$ et $2a + b = 4 + 2i$. Donc $b = 2$, $2a = 2 + 2i$, $a = 1 + i$ : $s : z' = (1 + i)z + 2$.
2. $a = 1 + i \neq 1$. Centre : $\omega = \dfrac{2}{1 - (1 + i)} = \dfrac{2}{-i} = 2i$, donc $\Omega(2i)$. Comme $1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$, le rapport est $\sqrt{2}$ et l'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
3. a. $z' - z = (1 + i)z + 2 - z = iz + 2 = i(z - 2i) = -i(2i - z) = -i(\omega - z)$. Comme $M \neq \Omega$, $\omega - z \neq 0$ et $\dfrac{z' - z}{\omega - z} = -i$.
   b. $\left|\dfrac{z' - z}{\omega - z}\right| = 1$ donne $MM' = M\Omega$, et $\arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$ donne $\left(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Le triangle $\Omega MM'$ est **rectangle isocèle en** $M$.
   c. Avec $M = O$ : $M' = B(2)$. $O\Omega = 2$, $OB = 2$, et $\Omega$ est sur l'axe imaginaire, $B$ sur l'axe réel : l'angle en $O$ est droit. Le triangle $\Omega OB$ est bien rectangle isocèle en $O$.
4. Pour construire $M'$ : on trace la perpendiculaire à $(M\Omega)$ passant par $M$, et on y reporte au compas la longueur $M\Omega$, du côté donné par l'angle $-\frac{\pi}{2}$ (sens des aiguilles d'une montre quand on tourne de $\overrightarrow{M\Omega}$ vers $\overrightarrow{MM'}$).

## S1-S3 Exercice 12

1. *On écrit $p+iq = r\,e^{i\varphi}$ ; alors $p\cos x + q\sin x = r\cos(x-\varphi)$.*
   a. $1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ : $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.
   b. $1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ : $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.
   c. $-1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$ : $-\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$.
2. a. $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4}$, donc $x-\dfrac{\pi}{4} = \pm\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ : $x = \dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $x = 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
   b. $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3}$, donc $x+\dfrac{\pi}{3} = \pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ : $x = \dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x = -\pi+2k\pi$. Dans $]-\pi\,;\pi]$ : $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x=\pi$.
   c. $\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$ demande $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} > 1$ : **aucune solution**.
3. $\cos(5x)+\cos x = 2\cos(3x)\cos(2x)$. L'équation équivaut à $\cos(3x)=0$ ou $\cos(2x)=0$.
   - $\cos(3x)=0 \iff x = \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}$ : dans $[0\,;\pi]$, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{6}$.
   - $\cos(2x)=0 \iff x = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$ : dans $[0\,;\pi]$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$.

   Solutions dans $[0\,;\pi]$ : $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{6}$.
4. a. $(2i)^5 = 32i$ et la ligne $5$ du triangle de Pascal est $1,5,10,10,5,1$ :

   $$\sin^5 x = \frac{e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix}}{32i} = \frac{2i\sin(5x)-10i\sin(3x)+20i\sin x}{32i} = \frac{\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin x}{16}.$$

   b. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx = \frac{1}{16}\left[-\frac{\cos(5x)}{5}+\frac{5\cos(3x)}{3}-10\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}-\frac{5}{3}+10\right) = \frac{1}{16}\times\frac{128}{15} = \frac{8}{15}.$$

SenAcad, une solution de BarroTech

## S1-S3 Exercice 13

1. Somme géométrique de raison $1+i\neq 1$ : $S=\dfrac{1-(1+i)^8}{1-(1+i)}=\dfrac{1-16}{-i}=\dfrac{15}{i}=-15i$, car $(1+i)^8=16$ (leçon 3).

2. a. $C_n+iS_n=1+e^{ix}+e^{2ix}+\cdots+e^{inx}=1+q+\cdots+q^n$ avec $q=e^{ix}$. Comme $x\in]0\,;2\pi[$, $q\neq 1$, et $C_n+iS_n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}=\dfrac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$.

   b. Avec $1-e^{i\alpha}=-2i\sin\dfrac{\alpha}{2}\,e^{i\frac{\alpha}{2}}$ :

$$C_n+iS_n=\frac{-2i\sin\frac{(n+1)x}{2}\,e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{-2i\sin\frac{x}{2}\,e^{i\frac{x}{2}}}=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,e^{i\frac{nx}{2}}.$$

   ($\sin\frac{x}{2}\neq 0$ car $\frac{x}{2}\in]0\,;\pi[$.)

   c. Le quotient est réel : en prenant les parties réelle et imaginaire,

$$C_n=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\qquad S_n=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

   Pour $n=1$ : $\dfrac{\sin x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=2\cos^2\dfrac{x}{2}=1+\cos x=C_1$.

3. $\cos\dfrac{4\pi}{5}=2\cos^2\dfrac{2\pi}{5}-1=2\times\dfrac{6-2\sqrt{5}}{16}-1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Puis $\cos\dfrac{\pi}{5}=-\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{5}\right)=-\cos\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

4. a. $z_C-z_A=-9+3i$, $z_D-z_A=-10$, $z_D-z_B=-8-4i$, $z_C-z_B=-7-i$. Le produit vaut

$$\frac{(-9+3i)(-8-4i)}{(-10)(-7-i)}=\frac{72+36i-24i+12}{70+10i}=\frac{84+12i}{70+10i}=\frac{12(7+i)}{10(7+i)}=\frac{6}{5}.$$

   C'est un réel, et trois des points ne sont jamais alignés : $A$, $B$, $C$, $D$ sont cocycliques.

   b. $|z_A|=|z_D|=5$, $|z_B|=\sqrt{9+16}=5$, $|z_C|=\sqrt{16+9}=5$ : les quatre points sont sur le cercle de centre $O$ et de rayon 5.

SenAcad, une solution de BarroTech