Exercices

TERMINALE S · CHAPITRE 6 · ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Deux exercices par leçon commune. L'exercice 11 est réservé aux séries S2, S4 et S2A, l'exercice 12 aux séries S1, S3 et S1A. Les modèles concrets sont simplifiés, avec des données inventées : aucune loi de physique n'est à connaître. Corrigés détaillés : `04_corriges.md`.

Leçon 1 : l'équation $y' = ay$

Exercice 1 : résoudre et utiliser une condition initiale

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
   - **a.** $y' = 5y$
   - **b.** $y' + 3y = 0$
   - **c.** $2y' - y = 0$
   - **d.** $4y' + 3y = 0$
2. Déterminer la solution f de $y' = -2y$ telle que $f(0) = 3$.
3. Déterminer la solution g de $3y' + y = 0$ telle que $g(3) = 2$.
4. Une fonction f est solution d'une équation $y' = ay$, avec $f(0) = 5$ et $f(2) = 20$. Déterminer le réel a, puis $f(x)$.
5. Soit a un réel non nul et f une solution de $y' = ay$ qui n'est pas la fonction nulle. Montrer que f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est strictement monotone.

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 2 : la demi-vie d'un élément radioactif

Modèle simplifié. On note $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs d'un échantillon à l'instant t, exprimé en jours. On admet que $N'(t) = -k\,N(t)$, où k est un réel strictement positif, et on note $N_0 = N(0)$.

1. Exprimer $N(t)$ en fonction de N_0, k et t.
2. La **demi-vie** T est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux s'est désintégrée : $N(T) = \dfrac{N_0}{2}$. Montrer que $T = \dfrac{\ln 2}{k}$. Dépend-elle de N_0 ?
3. Pour l'iode 131, utilisé en médecine, on prend $T = 8$ jours. Calculer k : valeur exacte, puis valeur arrondie à 10^{-4}.
4. Montrer que $N(t + T) = \dfrac{N(t)}{2}$ pour tout $t \geq 0$. Interpréter.
5. Quelle fraction des noyaux reste-t-il au bout de 24 jours ?
6. À partir de combien de jours entiers reste-t-il moins de $1\,\%$ des noyaux de départ ?

Leçon 2 : premier ordre avec second membre

Exercice 3 : second membre constant

1. Résoudre l'équation $y' + 4y = 8$, puis déterminer la solution f telle que $f(0) = 5$.
2. Résoudre l'équation $2y' - y = 3$, puis déterminer la solution g telle que $g(2) = 0$.
3. *Modèle simplifié : la charge d'un condensateur.* La tension $u(t)$, en volts, aux bornes d'un condensateur vérifie
$$u'(t) + 50\,u(t) = 300 \qquad \text{et} \qquad u(0) = 0,$$
où t est exprimé en secondes.
   - **a.** Exprimer $u(t)$ en fonction de t.
   - **b.** Étudier le sens de variation de u sur $[0\,;+\infty[$ et sa limite en $+\infty$. Interpréter.
   - **c.** À quel instant la tension atteint-elle $99\,\%$ de sa valeur limite ? Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée en millisecondes.

Exercice 4 : seconds membres variés, avec une indication

Partie A. On considère l'équation (E) : $y' + 2y = 3e^{x}$.

1. Résoudre l'équation homogène (E_0) : $y' + 2y = 0$.
2. Déterminer le réel a tel que la fonction g définie par $g(x) = a\,e^{x}$ soit solution de (E).
3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E_0).
4. En déduire les solutions de (E).
5. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

Partie B. On considère l'équation (F) : $y' - 2y = 5\sin x$.

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction $x \longmapsto a\cos x + b\sin x$ soit solution de (F).
2. Résoudre (F).
3. Déterminer la solution h de (F) telle que $h(0) = -1$. Que remarque-t-on ?

Leçon 3 : second ordre, l'équation caractéristique

Exercice 5 : résoudre avec l'équation caractéristique

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $y'' - y' - 6y = 0$
2. $y'' + 6y' + 9y = 0$
3. $y'' - 9y = 0$
4. $4y'' - 4y' + y = 0$
5. $y'' + 2y' = 0$
6. $2y'' - 5y' + 2y = 0$
7. Vérifier par le calcul que la fonction $x \longmapsto (x+1)\,e^{-3x}$ est solution de l'équation 2.

Exercice 6 : conditions initiales

1. Déterminer la solution f de $y'' - y' - 6y = 0$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 5$.
2. Déterminer la solution g de $y'' + 6y' + 9y = 0$ telle que $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$. Calculer $g'(x)$, puis étudier les variations de g et ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Déterminer les réels b et c tels que les fonctions $x \longmapsto e^{2x}$ et $x \longmapsto e^{-x}$ soient solutions de l'équation $y'' + by' + cy = 0$.
4. Déterminer la solution h de $y'' - 4y = 0$ dont la courbe passe par l'origine du repère, avec en ce point une tangente de coefficient directeur 2.

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 4 : second ordre, le cas $\Delta < 0$

Exercice 7 : oscillations

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
   - **a.** $y'' + 9y = 0$
   - **b.** $y'' + 2y' + 10y = 0$
   - **c.** $y'' - 4y' + 13y = 0$
   - **d.** $4y'' + y = 0$
2. Déterminer la solution f de l'équation a telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = -3$.
3. Déterminer la solution g de l'équation b telle que $g(0) = 1$ et $g'(0) = -1$. Montrer que $-e^{-x} \leq g(x) \leq e^{-x}$ pour tout réel x, puis en déduire la limite de g en $+\infty$.
4. Vérifier par le calcul que la fonction $x \longmapsto e^{2x}\sin 3x$ est solution de l'équation c.

Exercice 8 : un ressort

Modèle simplifié. Un solide accroché à un ressort oscille horizontalement. On note $x(t)$ sa position en centimètres à l'instant t, en secondes.

Partie A : sans frottement. On admet que $x'' + 25x = 0$, avec $x(0) = 3$ et $x'(0) = 20$.

1. Déterminer $x(t)$.
2. Soit φ le réel de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos\varphi = \dfrac{3}{5}$ et $\sin\varphi = \dfrac{4}{5}$. Montrer que $x(t) = 5\cos(5t - \varphi)$. En déduire l'amplitude et la période des oscillations.

SenAcad, une solution de BarroTech

Partie B : avec frottement. On admet maintenant que $x'' + 2x' + 26x = 0$, avec $x(0) = 3$ et $x'(0) = 2$.

1. Déterminer $x(t)$.
2. Montrer que $|x(t)| \leq 4e^{-t}$ pour tout $t \geq 0$. En déduire la limite de $x(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
3. À partir de quel instant est-on sûr que $|x(t)| \leq 0{,}1$ cm ?

Leçon 5 : second ordre avec second membre

Exercice 9 : chercher la solution particulière

1. On considère (E_1) : $y'' - y' - 2y = 4$.
   - **a.** Déterminer une solution constante de (E_1).
   - **b.** Résoudre (E_1).
   - **c.** Déterminer la solution f de (E_1) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.
2. On considère (E_2) : $y'' + 2y' + 2y = 5\cos x$.
   - **a.** Déterminer les réels a et b tels que $x \longmapsto a\cos x + b\sin x$ soit solution de (E_2).
   - **b.** Résoudre (E_2).
   - **c.** Déterminer la solution g de (E_2) telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$.
   - **d.** Montrer que, pour toute solution y de (E_2), $y(x) - (\cos x + 2\sin x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 10 : de l'équation à l'étude de fonction

Partie A. On considère l'équation (E) : $y'' + 2y' + y = 2$.

1. Résoudre l'équation homogène (E_0) : $y'' + 2y' + y = 0$.
2. Déterminer une solution constante de (E), puis résoudre (E).
3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

SenAcad, une solution de BaroTech

Partie B. On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - (x+1)\,e^{-x}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = x\,e^{-x}$. Dresser le tableau de variations de f. En déduire que $f(x) \geq 1$ pour tout réel x.
3. Montrer que la droite D d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D.
4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1.
5. Tracer D, la tangente et l'allure de $\mathcal{C}$. *On donne $f(1) \approx 1{,}26$ et $f(-2) \approx 9{,}39$.*

S2-S4 Exercice de la leçon 6

Exercice 11 : suivre l'indication

1. Résoudre $y'' - 5y' + 6y = 6x - 5$, en cherchant une solution particulière affine.
2. Résoudre $y'' + y' - 2y = 4e^{-x}$, en cherchant une solution particulière de la forme $a\,e^{-x}$.
3. On considère (E) : $y'' + y' - 2y = 3e^{x}$.
   - **a.** Montrer qu'aucune fonction de la forme $x \longmapsto a\,e^{x}$ n'est solution de (E).
   - **b.** Déterminer le réel a tel que $x \longmapsto a\,x\,e^{x}$ soit solution de (E).
   - **c.** Résoudre (E), puis déterminer la solution f telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 4$.
4. Résoudre $y' - 3y = e^{3x}$, en cherchant une solution particulière de la forme $a\,x\,e^{3x}$. Déterminer la solution g telle que $g(0) = 2$.
5. Résoudre $y'' + y = x^{2}$, en cherchant une solution particulière de la forme $ax^{2} + bx + c$.

S1-S3 Exercice de la leçon 7

Exercice 12 : régime forcé et résonance

On considère l'équation (E) : $y'' + 4y' + 5y = 8\sin t$.

1. Résoudre l'équation homogène (E_0) associée.
2. Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $p\cos t + q\sin t$.
3. Résoudre (E).
4. Déterminer la solution y de (E) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
5. Montrer que $\sin t - \cos t = \sqrt{2}\sin\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$. Montrer que $y(t) - (\sin t - \cos t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Quelle est l'amplitude du régime permanent ?
6. On considère maintenant (F) : $y'' + 4y = 4\cos 2t$.
   - **a.** Montrer qu'aucune fonction de la forme $p\cos 2t + q\sin 2t$ n'est solution de (F).
   - **b.** Vérifier que la fonction $t \longmapsto t\sin 2t$ est solution de (F).
   - **c.** Résoudre (F), puis déterminer la solution z telle que $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$.
   - **d.** Calculer $z\left(\dfrac{\pi}{4} + n\pi\right)$ pour tout entier naturel n. La fonction z est-elle bornée sur $[0\,;+\infty[$? Comment s'appelle ce phénomène ?

Propriété de BarroTech