Corrigés détaillés

TERMINALE S · CHAPITRE 6 · ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Chaque résultat a été vérifié par calcul formel. Les rappels de méthode sont en italique.

Exercice 1

1. *Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions λe^{ax}, $\lambda \in \mathbb{R}$. On commence par isoler y'.*
   - **a.** $y = \lambda e^{5x}$.
   - **b.** $y' = -3y$, donc $y = \lambda e^{-3x}$.
   - **c.** $y' = \dfrac{1}{2}y$, donc $y = \lambda e^{\frac{x}{2}}$.
   - **d.** $y' = -\dfrac{3}{4}y$, donc $y = \lambda e^{-\frac{3x}{4}}$.
2. $f(x) = \lambda e^{-2x}$ et $f(0) = \lambda = 3$, donc $f(x) = 3e^{-2x}$.
3. $y' = -\dfrac{1}{3}y$, donc $g(x) = \lambda e^{-\frac{x}{3}}$. La condition $g(3) = \lambda e^{-1} = 2$ donne $\lambda = 2e$, d'où
$$g(x) = 2e \times e^{-\frac{x}{3}} = 2e^{1-\frac{x}{3}}.$$
4. $f(x) = \lambda e^{ax}$. $f(0) = \lambda = 5$, puis $f(2) = 5e^{2a} = 20$, soit $e^{2a} = 4$, donc $2a = \ln 4 = 2\ln 2$ et $a = \ln 2$. Ainsi $f(x) = 5\,e^{x\ln 2}$.
5. $f(x) = \lambda e^{ax}$ avec $\lambda \neq 0$, puisque f n'est pas la fonction nulle. Comme $e^{ax} > 0$, $f(x)$ est du signe de λ : il n'est jamais nul. De plus $f'(x) = a\lambda\, e^{ax}$ est du signe de $a\lambda$, qui est un réel non nul : f' garde un signe constant strict, et f est strictement monotone (croissante si $a\lambda > 0$, décroissante si $a\lambda < 0$).

SenAcad, une solution de Barrolech

Exercice 2

1. *Théorème 2 avec $a = -k$:* $N(t) = N_0\, e^{-kt}$.
2. $N(T) = \dfrac{N_0}{2} \iff N_0\, e^{-kT} = \dfrac{N_0}{2} \iff e^{-kT} = \dfrac{1}{2} \iff -kT = -\ln 2 \iff T = \dfrac{\ln 2}{k}$. La demi-vie ne dépend pas de N_0 : elle ne dépend que de l'élément radioactif.
3. $k = \dfrac{\ln 2}{T} = \dfrac{\ln 2}{8} \approx 0{,}0866$ (par jour).
4. $N(t+T) = N_0\, e^{-kt}\, e^{-kT} = N(t) \times \dfrac{1}{2}$. Quel que soit l'instant de départ, le nombre de noyaux est divisé par 2 tous les 8 jours.
5. $24 = 3T$, donc $N(24) = \dfrac{N_0}{2^3} = \dfrac{N_0}{8}$: il reste un huitième des noyaux, soit $12{,}5\,\%$.
6. $N(t) < \dfrac{N_0}{100} \iff e^{-kt} < \dfrac{1}{100} \iff -kt < -\ln 100 \iff t > \dfrac{\ln 100}{k} = \dfrac{8\ln 100}{\ln 2} \approx 53{,}15$. *La fonction $\ln$ est strictement croissante, et on divise par $-k < 0$, ce qui change le sens de l'inégalité.* Il reste moins de $1\,\%$ des noyaux à partir du 54^{e} jour.

Exercice 3

1. $y' = -4y + 8$. *Solution constante : avec $y' = 0$, il reste $4y = 8$, donc $y = 2$.* Les solutions sont $y = \lambda e^{-4x} + 2$. $f(0) = \lambda + 2 = 5$, donc $\lambda = 3$ et $f(x) = 3e^{-4x} + 2$.
2. Solution constante : $-y = 3$, donc $y = -3$. L'équation homogène $2y' - y = 0$ s'écrit $y' = \dfrac{1}{2}y$. Les solutions sont $y = \lambda e^{\frac{x}{2}} - 3$. $g(2) = \lambda e - 3 = 0$, donc $\lambda = \dfrac{3}{e}$ et $g(x) = 3e^{\frac{x}{2}-1} - 3$.
3. **a.** Solution constante : $50u = 300$, donc $u = 6$. Ainsi $u(t) = \lambda e^{-50t} + 6$, et $u(0) = \lambda + 6 = 0$ donne $\lambda = -6$:

$$u(t) = 6 - 6e^{-50t} = 6\left(1 - e^{-50t}\right).$$

   - **b.** $u'(t) = 300\,e^{-50t} > 0$: u est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. Comme $e^{-50t} \to 0$, $u(t) \to 6$. La tension augmente et se rapproche de 6 volts sans jamais l'atteindre : le condensateur se charge.
   - **c.** $u(t) = 0{,}99 \times 6 \iff 6e^{-50t} = 0{,}06 \iff e^{-50t} = 0{,}01 \iff t = \dfrac{\ln 100}{50} \approx 0{,}092$ s, soit environ 92 millisecondes.

Exercice 4

Partie A

1. $y' = -2y$: les solutions de (E_0) sont les fonctions $x \longmapsto \lambda e^{-2x}$.
2. $g'(x) + 2g(x) = ae^x + 2ae^x = 3ae^x$. On veut $3a = 3$, donc $a = 1$ et $g(x) = e^x$.
3. Pour toute fonction f dérivable :

$$(f - g)' + 2(f - g) = (f' + 2f) - (g' + 2g) = (f' + 2f) - 3e^x.$$

   Donc $f' + 2f = 3e^x$ si et seulement si $(f - g)' + 2(f - g) = 0$.
4. $f - g = \lambda e^{-2x}$, donc les solutions de (E) sont les fonctions $x \longmapsto e^x + \lambda e^{-2x}$.
5. $f(0) = 1 + \lambda = 0$, donc $\lambda = -1$ et $f(x) = e^x - e^{-2x}$.

Partie B

1. Pour $y = a\cos x + b\sin x$:

$$y' - 2y = (-a\sin x + b\cos x) - 2a\cos x - 2b\sin x = (b - 2a)\cos x + (-a - 2b)\sin x.$$

   On veut obtenir $5\sin x$ pour tout x. Avec $x = 0$ puis $x = \frac{\pi}{2}$: $b - 2a = 0$ et $-a - 2b = 5$. Donc $b = 2a$, puis $-5a = 5$: $a = -1$ et $b = -2$. La fonction $x \longmapsto -\cos x - 2\sin x$ est solution.
2. L'équation homogène $y' = 2y$ a pour solutions λe^{2x}. Les solutions de (F) sont les fonctions $x \longmapsto \lambda e^{2x} - \cos x - 2\sin x$.
3. $h(0) = \lambda - 1 = -1$, donc $\lambda = 0$ et $h(x) = -\cos x - 2\sin x$. On retrouve la solution particulière de la question 1. C'est la seule solution de (F) qui reste bornée en $+\infty$: dès que $\lambda \neq 0$, le terme λe^{2x} tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 5

On écrit l'équation caractéristique, on calcule son discriminant, puis on applique le théorème 4.

1. $r^2 - r - 6 = 0$: $\Delta = 25$, racines 3 et -2. $y = \lambda e^{3x} + \mu e^{-2x}$.
2. $r^2 + 6r + 9 = (r+3)^2$: racine double -3. $y = (\lambda x + \mu)\, e^{-3x}$.
3. $r^2 - 9 = 0$: racines 3 et -3. $y = \lambda e^{3x} + \mu e^{-3x}$.
4. $4r^2 - 4r + 1 = (2r-1)^2$: racine double $\frac{1}{2}$. $y = (\lambda x + \mu)\, e^{\frac{x}{2}}$.
5. $r^2 + 2r = r(r+2)$: racines 0 et -2. $y = \lambda + \mu e^{-2x}$ *(car $e^{0x} = 1$)*.
6. $2r^2 - 5r + 2 = 0$: $\Delta = 9$, racines $\frac{5+3}{4} = 2$ et $\frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$. $y = \lambda e^{2x} + \mu e^{\frac{x}{2}}$.
7. Avec $f(x) = (x+1)e^{-3x}$: $f'(x) = (-3x-2)\, e^{-3x}$ et $f''(x) = (9x+3)\, e^{-3x}$. Donc
$$f'' + 6f' + 9f = \big[(9x+3) + 6(-3x-2) + 9(x+1)\big] e^{-3x} = 0.$$
C'est la solution obtenue pour $\lambda = \mu = 1$ dans la question 2.

Exercice 6

1. $f(x) = \lambda e^{3x} + \mu e^{-2x}$ (exercice 5). $f(0) = \lambda + \mu = 0$ et $f'(0) = 3\lambda - 2\mu = 5$. Avec $\lambda = -\mu$: $-5\mu = 5$, donc $\mu = -1$, $\lambda = 1$ et $f(x) = e^{3x} - e^{-2x}$.
2. $g(x) = (\lambda x + \mu)\, e^{-3x}$ et $g'(x) = (\lambda - 3\lambda x - 3\mu)\, e^{-3x}$. $g(0) = \mu = 1$ et $g'(0) = \lambda - 3\mu = 0$, donc $\lambda = 3$:
$$g(x) = (3x+1)\, e^{-3x}, \qquad g'(x) = (3 - 9x - 3)\, e^{-3x} = -9x\, e^{-3x}.$$
   - $g'(x)$ est du signe de $-x$: g est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$, avec un maximum $g(0) = 1$.
   - En $+\infty$: $g(x) = 3x\, e^{-3x} + e^{-3x}$. Avec $X = 3x$, $Xe^{-X} \to 0$ (croissance comparée), et $e^{-3x} \to 0$. Donc $\lim_{+\infty} g = 0$.
   - En $-\infty$: $3x + 1 \to -\infty$ et $e^{-3x} \to +\infty$, donc $\lim_{-\infty} g = -\infty$.
3. *$x \longmapsto e^{rx}$ est solution si et seulement si r est racine de l'équation caractéristique $r^2 + br + c = 0$.* Il faut donc que 2 et -1 en soient les racines :
$$r^2 + br + c = (r-2)(r+1) = r^2 - r - 2.$$
Donc $b = -1$ et $c = -2$. *Vérification : $4 - 2 - 2 = 0$ et $1 + 1 - 2 = 0$.*
4. $h(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}$. La courbe passe par l'origine : $h(0) = \lambda + \mu = 0$. La tangente en ce point a pour coefficient directeur $h'(0) = 2\lambda - 2\mu = 2$. Donc $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et $\mu = -\dfrac{1}{2}$:
$$h(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}.$$

Exercice 7

1. - **a.** $y'' + 3^2 y = 0$: $y = \lambda \cos 3x + \mu \sin 3x$.
   - **b.** $\Delta = 4 - 40 = -36$, $\alpha = -1$ et $\beta = \frac{6}{2} = 3$: $y = e^{-x}(\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x)$.
   - **c.** $\Delta = 16 - 52 = -36$, $\alpha = 2$ et $\beta = 3$: $y = e^{2x}(\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x)$.
   - **d.** L'équation s'écrit $y'' + \left(\frac{1}{2}\right)^2 y = 0$: $y = \lambda \cos \dfrac{x}{2} + \mu \sin \dfrac{x}{2}$.
2. $f(x) = \lambda \cos 3x + \mu \sin 3x$ et $f'(x) = -3\lambda \sin 3x + 3\mu \cos 3x$. $f(0) = \lambda = 2$ et $f'(0) = 3\mu = -3$, donc $\mu = -1$ et $f(x) = 2\cos 3x - \sin 3x$.
3. $g(x) = e^{-x}(\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x)$ et
$$g'(x) = e^{-x}\big[(-\lambda + 3\mu)\cos 3x + (-\mu - 3\lambda)\sin 3x\big].$$
$g(0) = \lambda = 1$ et $g'(0) = -\lambda + 3\mu = -1$, donc $\mu = 0$ et $g(x) = e^{-x}\cos 3x$. Comme $-1 \leq \cos 3x \leq 1$ et $e^{-x} > 0$, on a $-e^{-x} \leq g(x) \leq e^{-x}$. Or $e^{-x} \to 0$ en $+\infty$: par le théorème des gendarmes, $\lim_{+\infty} g = 0$.
4. Avec $f(x) = e^{2x}\sin 3x$: $f'(x) = e^{2x}(2\sin 3x + 3\cos 3x)$ et $f''(x) = e^{2x}(-5\sin 3x + 12\cos 3x)$. Donc
$$f'' - 4f' + 13f = e^{2x}\big[(-5 - 8 + 13)\sin 3x + (12 - 12)\cos 3x\big] = 0.$$

Exercice 8

Partie A

SenAcad, une solution de BarroTech

1. $x(t) = \lambda \cos 5t + \mu \sin 5t$. $x(0) = \lambda = 3$ et $x'(0) = 5\mu = 20$, donc $\mu = 4$: $x(t) = 3\cos 5t + 4\sin 5t$.
2. $5\cos(5t - \varphi) = 5\left(\cos 5t \cos\varphi + \sin 5t \sin\varphi\right) = 5\left(\dfrac{3}{5}\cos 5t + \dfrac{4}{5}\sin 5t\right) = 3\cos 5t + 4\sin 5t = x(t)$.
L'amplitude est de 5 cm, et la période vaut $\dfrac{2\pi}{5} \approx 1{,}26$ s.

Partie B

1. $r^2 + 2r + 26 = 0$: $\Delta = 4 - 104 = -100$, $\alpha = -1$ et $\beta = 5$. Donc $x(t) = e^{-t}(\lambda \cos 5t + \mu \sin 5t)$ et
$$x'(t) = e^{-t}\big[(-\lambda + 5\mu)\cos 5t + (-\mu - 5\lambda)\sin 5t\big].$$
$x(0) = \lambda = 3$ et $x'(0) = -3 + 5\mu = 2$, donc $\mu = 1$: $x(t) = e^{-t}(3\cos 5t + \sin 5t)$.
2. $|3\cos 5t + \sin 5t| \leq 3|\cos 5t| + |\sin 5t| \leq 3 + 1 = 4$, donc $|x(t)| \leq 4e^{-t}$. Comme $4e^{-t} \to 0$, on a $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$: les oscillations s'amortissent.
3. Il suffit que $4e^{-t} \leq 0{,}1$, c'est-à-dire $e^{-t} \leq \dfrac{1}{40}$, soit $t \geq \ln 40 \approx 3{,}69$ s. À partir de $3{,}7$ secondes environ, on est sûr que $|x(t)| \leq 0{,}1$ cm.

Exercice 9

1. - **a.** Pour une constante, $y'' = y' = 0$: il reste $-2y = 4$, donc $y = -2$.
   - **b.** $r^2 - r - 2 = 0$ a pour racines 2 et -1. Les solutions de (E_1) sont $y = \lambda e^{2x} + \mu e^{-x} - 2$.
   - **c.** $f(0) = \lambda + \mu - 2 = 0$ et $f'(0) = 2\lambda - \mu = 1$. En ajoutant $\lambda + \mu = 2$ et $2\lambda - \mu = 1$: $3\lambda = 3$, donc $\lambda = 1$, $\mu = 1$ et $f(x) = e^{2x} + e^{-x} - 2$.
2. - **a.** Pour $y_p = a\cos x + b\sin x$, on a $y_p'' = -y_p$, donc
     $$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = y_p + 2y_p' = (a + 2b)\cos x + (b - 2a)\sin x.$$
     On veut $a + 2b = 5$ et $b - 2a = 0$. Donc $b = 2a$, $5a = 5$: $a = 1$, $b = 2$, et $y_p(x) = \cos x + 2\sin x$.
   - **b.** $r^2 + 2r + 2 = 0$: $\Delta = -4$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Les solutions sont $y = e^{-x}(\lambda\cos x + \mu\sin x) + \cos x + 2\sin x$.
   - **c.** $g(0) = \lambda + 1 = 0$, donc $\lambda = -1$. Puis $g'(x) = e^{-x}\left[(-\lambda + \mu)\cos x + (-\mu - \lambda)\sin x\right] - \sin x + 2\cos x$, donc $g'(0) = -\lambda + \mu + 2 = 3 + \mu = 0$ et $\mu = -3$:
     $$g(x) = \cos x + 2\sin x - e^{-x}(\cos x + 3\sin x).$$
   - **d.** $y(x) - (\cos x + 2\sin x) = e^{-x}(\lambda\cos x + \mu\sin x)$, et $\left|\lambda\cos x + \mu\sin x\right| \leq |\lambda| + |\mu|$. Donc $\left|y(x) - (\cos x + 2\sin x)\right| \leq (|\lambda| + |\mu|)\,e^{-x}$, qui tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 10

Partie A

SenAcad, une solution de BarroTech

1. $r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2$: racine double -1. Les solutions de (E_0) sont $y = (\lambda x + \mu)\,e^{-x}$.
2. Pour une constante : $y = 2$. Les solutions de (E) sont $y = (\lambda x + \mu)\,e^{-x} + 2$.
3. $f(0) = \mu + 2 = 1$, donc $\mu = -1$. $f'(x) = (\lambda - \lambda x - \mu)\,e^{-x}$, donc $f'(0) = \lambda - \mu = 0$ et $\lambda = -1$:
   $$f(x) = (-x - 1)\,e^{-x} + 2 = 2 - (x + 1)\,e^{-x}.$$

Partie B

1. En $+\infty$: $(x+1)e^{-x} = xe^{-x} + e^{-x}$ tend vers 0 (croissance comparée), donc $\lim_{+\infty} f = 2$. En $-\infty$: $x+1 \to -\infty$ et $e^{-x} \to +\infty$, donc $(x+1)e^{-x} \to -\infty$ et $\lim_{-\infty} f = +\infty$.
2. $f'(x) = -\left[e^{-x} - (x+1)e^{-x}\right] = -(1-x-1)\,e^{-x} = x\,e^{-x}$, du signe de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	décroissante	1	croissante	2

Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est $f(0) = 1$, donc $f(x) \geq 1$ pour tout réel x.

3. $f(x) - 2 = -(x+1)\,e^{-x} \to 0$ en $+\infty$: la droite D est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$. Comme $e^{-x} > 0$, $f(x) - 2$ est du signe de $-(x+1)$:
   - pour $x < -1$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de D ;
   - pour $x = -1$, $\mathcal{C}$ coupe D au point $(-1\,;2)$;
   - pour $x > -1$, $\mathcal{C}$ est au-dessous de D.
4. $f(-1) = 2$ et $f'(-1) = -e^{1} = -e$. La tangente a pour équation $y = -e(x+1) + 2$.
5. La courbe descend de $+\infty$ jusqu'au point $(0\,;1)$, où la tangente est horizontale, puis remonte vers la droite $y = 2$ en restant au-dessous. Elle coupe D au point $(-1\,;2)$, avec la tangente de pente $-e$.

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 11

1. Pour $y_p = mx + p$: $y_p'' - 5y_p' + 6y_p = 6mx + (6p - 5m)$. Par identification avec $6x - 5$: $m = 1$ et $6p - 5 = -5$, donc $p = 0$ et $y_p(x) = x$. L'équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = 0$ a pour racines 2 et 3. Solutions : $y = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} + x$.
2. Pour $y_p = ae^{-x}$: $y_p'' + y_p' - 2y_p = (a - a - 2a)\,e^{-x} = -2ae^{-x}$. On veut $-2a = 4$, donc $a = -2$. Les racines de $r^2 + r - 2 = 0$ sont 1 et -2. Solutions : $y = \lambda e^{x} + \mu e^{-2x} - 2e^{-x}$.
3. - **a.** Pour $y = ae^{x}$: $y'' + y' - 2y = (a + a - 2a)\,e^{x} = 0$, qui ne vaut jamais $3e^{x}$. *C'est normal : 1 est racine de l'équation caractéristique, donc e^{x} est solution de l'équation homogène.*
   - **b.** Pour $y_p = axe^{x}$: $y_p' = a(x+1)e^{x}$ et $y_p'' = a(x+2)e^{x}$, donc $y_p'' + y_p' - 2y_p = a\left[(x+2) + (x+1) - 2x\right]e^{x} = 3ae^{x}$. On veut $a = 1$: $y_p(x) = xe^{x}$.
   - **c.** Solutions : $y = \lambda e^{x} + \mu e^{-2x} + xe^{x}$. Alors $f'(x) = \lambda e^{x} - 2\mu e^{-2x} + (x+1)e^{x}$. $f(0) = \lambda + \mu = 0$ et $f'(0) = \lambda - 2\mu + 1 = 4$. Avec $\lambda = -\mu$: $-3\mu = 3$, donc $\mu = -1$, $\lambda = 1$, et
   $$f(x) = e^{x} - e^{-2x} + xe^{x} = (x+1)\,e^{x} - e^{-2x}.$$
4. Pour $y_p = axe^{3x}$: $y_p' = a(1+3x)e^{3x}$, donc $y_p' - 3y_p = ae^{3x}$, et $a = 1$. Les solutions sont $y = \lambda e^{3x} + xe^{3x} = (x+\lambda)\,e^{3x}$. $g(0) = \lambda = 2$, donc $g(x) = (x+2)\,e^{3x}$.
5. Pour $y_p = ax^2 + bx + c$: $y_p'' = 2a$, donc $y_p'' + y_p = ax^2 + bx + (2a + c)$. Par identification avec x^2 : $a = 1$, $b = 0$ et $2a + c = 0$, donc $c = -2$ et $y_p(x) = x^2 - 2$. Les solutions sont $y = \lambda \cos x + \mu \sin x + x^2 - 2$.

Exercice 12

1. $r^2+4r+5=0$: $\Delta=16-20=-4$, $\alpha=-2$ et $\beta=1$. Les solutions de (E_0) sont $y=e^{-2t}(\lambda\cos t+\mu\sin t)$.
2. Pour $y_p=p\cos t+q\sin t$, on a $y_p''=-y_p$, donc
$$y_p''+4y_p'+5y_p=4y_p+4y_p'=(4p+4q)\cos t+(4q-4p)\sin t.$$
On veut $4p+4q=0$ et $4q-4p=8$, soit $p+q=0$ et $q-p=2$: $q=1$ et $p=-1$. Donc $y_p(t)=\sin t-\cos t$.
3. Les solutions de (E) sont $y(t)=e^{-2t}(\lambda\cos t+\mu\sin t)+\sin t-\cos t$.
4. $y(0)=\lambda-1=0$, donc $\lambda=1$. Puis
$$y'(t)=e^{-2t}\big[(-2\lambda+\mu)\cos t+(-2\mu-\lambda)\sin t\big]+\cos t+\sin t,$$
donc $y'(0)=-2+\mu+1=0$ et $\mu=1$: $y(t)=e^{-2t}(\cos t+\sin t)+\sin t-\cos t$.
5. $\sqrt{2}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin t\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos t\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin t-\cos t)=\sin t-\cos t$. Puis $\big|y(t)-(\sin t-\cos t)\big|=e^{-2t}\,|\cos t+\sin t|\le 2e^{-2t}$, qui tend vers 0. Le régime permanent est $\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$, d'amplitude $\sqrt{2}\approx 1{,}41$.
6. - **a.** Pour $y=p\cos 2t+q\sin 2t$, on a $y''=-4y$, donc $y''+4y=0$, qui ne vaut pas $4\cos 2t$. *Ici $b=0$ et $c=a\omega^2=4$: c'est le cas où la méthode échoue.*
   - **b.** $(t\sin 2t)'=\sin 2t+2t\cos 2t$ et $(t\sin 2t)''=4\cos 2t-4t\sin 2t$. Donc $(t\sin 2t)''+4\,t\sin 2t=4\cos 2t$.
   - **c.** Les solutions de (F) sont $y=\lambda\cos 2t+\mu\sin 2t+t\sin 2t$. $z(0)=\lambda=0$, et $z'(t)=2\mu\cos 2t+\sin 2t+2t\cos 2t$ quand $\lambda=0$, donc $z'(0)=2\mu=0$. Ainsi $z(t)=t\sin 2t$.
   - **d.** $z\left(\dfrac{\pi}{4}+n\pi\right)=\left(\dfrac{\pi}{4}+n\pi\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\dfrac{\pi}{4}+n\pi$, qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. La fonction z n'est pas bornée : les oscillations grandissent sans limite. C'est la **résonance**.

SenAcad, une solution de BarroTech