Exercices

TERMINALE S · CHAPITRE 5 · CALCUL INTÉGRAL

Exercices classés par leçon, du plus simple au plus complet. L'exercice 11 est réservé aux séries S2, S4, S2A et S5. Les exercices 12 et 13 sont réservés aux séries S1, S3 et S1A. Calculatrice autorisée pour les valeurs approchées. Les corrigés détaillés sont dans la fiche « Corrigés ».

Leçon 1 : l'intégrale d'une fonction continue

Exercice 1 : calculer des intégrales

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} (3x^2 - 2x + 1)\,dx$
2. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$
3. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$
4. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$
5. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} e^x\,dx$
6. $\displaystyle\int_{1}^{e^2} \frac{1}{x}\,dx$
7. $\displaystyle\int_{2}^{0} (x^3 - x)\,dx$
8. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx$

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 2 : aire, géométrie et fonction définie par une intégrale

Partie A. Le repère est orthonormé.

1. Calculer $\displaystyle\int_{0}^{3} (2x + 1)\,dx$, puis retrouver ce résultat en calculant l'aire d'un trapèze.
2. Soit $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ sur $[-3;3]$. Montrer que le point $M(x;y)$, avec $y = g(x)$, est à la distance 3 de l'origine. En déduire la nature de la courbe de g, puis la valeur de $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$ et de $\displaystyle\int_{0}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$.
3. On reprend la question 1 dans un repère orthogonal d'unités 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée. Quelle est l'aire du trapèze en cm² ?

Partie B.

1. Pour tout réel x, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.
   a. Que vaut $F(0)$?
   b. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.
   c. En déduire le sens de variation de F, puis le signe de $F(x)$ selon les valeurs de x.
2. Un mobile se déplace sur un axe. Sa vitesse à l'instant t (en secondes) est $v(t) = 3t^2 - 2t$ (en mètres par seconde). Calculer son déplacement entre les instants $t = 1$ et $t = 3$.

Leçon 2 : propriétés de l'intégrale

Exercice 3 : propriétés et inégalités

1. f et g sont continues sur $[0;5]$. On sait que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 3$, $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx = -1$ et $\displaystyle\int_0^5 g(x)\,dx = 4$.
   Calculer :
   a. $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx$ b. $\displaystyle\int_2^0 f(x)\,dx$ c. $\displaystyle\int_5^0 \big(2f(x) - 3g(x)\big)\,dx$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^3 |x-2|\,dx$.
3. Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x) = x^2$ si $x \leq 1$ et $f(x) = 2x - 1$ si $x > 1$. Vérifier que f est continue en 1, puis calculer $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \big(2e^x - 3x^2\big)\,dx$.
5. Sans calculer les intégrales, donner leur signe :
   a. $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - x)\,dx$ b. $\displaystyle\int_2^1 \ln x\,dx$
6. Montrer que $\dfrac{1}{9} \leq \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{1+x^3} \leq \frac{1}{2}$.
7. Soit $J = \displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.
   a. Montrer que $1 \leq J \leq e$.
   b. Comparer x^2 et x sur $[0;1]$, puis en déduire que $J \leq e - 1$.
8. Montrer que $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(10x)}{1+x}\,dx\right| \leq \ln 2$.

Leçon 3 : calculer une intégrale

Exercice 4 : avec une primitive

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

SenAfad, une solution de BarroTech

3. $\displaystyle\int_0^1 e^{2x-1}\,dx$
4. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x\,dx$
7. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$
8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$. *Indication :* $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.
9. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+x+1}{x}\,dx$

Exercice 5 : intégration par parties

1. Calculer à l'aide d'une intégration par parties :
   a. $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx$ b. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ c. $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$ d. $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,dx$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx$ à l'aide de deux intégrations par parties.
3. On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx$.
   a. À l'aide d'une intégration par parties sur I (avec $u=\sin x$ et $v'=e^x$), montrer que $I = -J$.
   b. À l'aide d'une intégration par parties sur J, montrer que $J = -1 - e^{\pi} + I$.
   c. En déduire les valeurs de I et de J.

Leçon 4 : calcul d'aires

Exercice 6 : aires de domaines

1. Soit $f(x) = x^2 - 2x$ sur $[0;3]$.
   a. Calculer $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$.
   b. Étudier le signe de f sur $[0;3]$, puis calculer l'aire du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=3$. Expliquer la différence avec le résultat de la question a.
2. On considère la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$ et la droite $\mathcal{D} : y = x + 2$.
   a. Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$, et la position relative de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ entre ces points.
   b. Calculer l'aire du domaine limité par $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$, en unités d'aire.
   c. Le repère a pour unités 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée. Donner cette aire en cm².
3. Calculer l'aire du domaine limité par les courbes des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^2$ sur $[0;1]$.

Exercice 7 : aire d'un domaine illimité

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\,e^{-x}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1. Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0;+\infty[$.
2. Pour $\lambda > 0$, on pose $A(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} x\,e^{-x}\,dx$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $A(\lambda) = 1 - (\lambda+1)e^{-\lambda}$.
3. Interpréter $A(\lambda)$ graphiquement. Donner la valeur exacte de $A(2)$, puis une valeur approchée en cm² au centième près.
4. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.
5. Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$. Calculer l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$, la droite d'équation $y = x$ et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

Leçon 5 : calcul de volumes

Exercice 8 : volumes

1. Un verre a une hauteur de 10 cm. À la hauteur z (en cm, $0 \leq z \leq 10$), sa section horizontale est un disque de rayon $r(z) = 2 + \dfrac{z}{5}$ cm.
   a. Exprimer l'aire $S(z)$ de la section.
   b. Calculer le volume du verre, en cm³, puis une valeur approchée en centilitres (1 cL $= 10$ cm³).
2. Une pyramide a pour sommet O, une hauteur de 6 et pour base un carré de côté 4. À la distance z du sommet, la section est un carré de côté $\dfrac{2z}{3}$. Calculer son volume avec une intégrale, puis vérifier avec la formule $\dfrac{Bh}{3}$.
3. On fait tourner autour de l'axe des abscisses la courbe de $x \mapsto \sin x$ sur $[0;\pi]$. Calculer le volume du solide obtenu. *Indication :* $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.
4. Pour $a > 1$, on fait tourner autour de l'axe des abscisses la courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $[1;a]$. Calculer le volume $V(a)$ du solide obtenu, puis sa limite quand a tend vers $+\infty$.
5. **Calotte sphérique.** Une boule de rayon R est coupée par un plan situé à la distance $R - h$ de son centre ($0 < h \leq 2R$). La calotte est la partie de la boule de hauteur h, comprise entre les cotes $z = R - h$ et $z = R$. Sachant que $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$, montrer que son volume vaut $V = \dfrac{\pi h^2(3R - h)}{3}$. Vérifier que l'on retrouve le volume de la boule pour $h = 2R$.

Leçon 6 : encadrements et valeurs approchées

Exercice 9 : encadrer en intégrant

1. a. Montrer que, pour tout $t \geq 0$: $1 - t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$. *Indication : calculer* $(1 - t + t^2)(1 + t)$.

   b. En déduire que, pour tout $x \geq 0$: $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

   c. En déduire un encadrement de $\ln(1{,}2)$ d'amplitude inférieure à $0{,}003$.

2. a. En intégrant l'inégalité $e^t \geq 1$ entre 0 et x, montrer que $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \geq 0$.

   b. En intégrant l'inégalité obtenue, montrer que $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 10 : valeurs approchées d'une intégrale

On veut une valeur approchée de $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$, dont on ne connaît pas de primitive. On partage $[0;1]$ en 4 intervalles de longueur $h = 0{,}25$. On donne, à 10^{-4} près, les valeurs de $f(x) = e^{-x^2}$:

x	0	$0{,}125$	$0{,}25$	$0{,}375$	$0{,}5$	$0{,}625$	$0{,}75$	$0{,}875$	1
$f(x)$	1	$0{,}9845$	$0{,}9394$	$0{,}8688$	$0{,}7788$	$0{,}6766$	$0{,}5698$	$0{,}4650$	$0{,}3679$

On rappelle les formules des rectangles $R_4 = h\big[f(0) + f(0{,}25) + f(0{,}5) + f(0{,}75)\big]$ et $R'_4 = h\big[f(0{,}25) + f(0{,}5) + f(0{,}75) + f(1)\big]$, des trapèzes $T_4 = \dfrac{R_4 + R'_4}{2}$ et des tangentes $M_4 = h\big[f(0{,}125) + f(0{,}375) + f(0{,}625) + f(0{,}875)\big]$.

1. Justifier que f est décroissante sur $[0;1]$.
2. Calculer R_4 et R'_4, puis justifier que $R'_4 \leq I \leq R_4$.
3. Calculer T_4 et M_4.
4. La calculatrice donne $I \approx 0{,}7468$. Quelle méthode donne ici la meilleure approximation ? Comparer avec l'encadrement $1 - \dfrac{1}{e} \leq I \leq 1$ obtenu dans le cours.

S2-S4 Exercice de la leçon 7

Exercice 11 : centre d'inertie et moment d'inertie

On rappelle les formules : tige sur $[a;b]$ de masse linéique μ : $M=\displaystyle\int_a^b \mu(x)\,dx$, $x_G=\dfrac{1}{M}\displaystyle\int_a^b x\,\mu(x)\,dx$, $J=\displaystyle\int_a^b x^2\mu(x)\,dx$; plaque homogène sous la courbe de $f\geq 0$, d'aire $\mathcal{A}$: $x_G=\dfrac{1}{\mathcal{A}}\displaystyle\int_a^b x\,f(x)\,dx$ et $y_G=\dfrac{1}{2\mathcal{A}}\displaystyle\int_a^b f(x)^2\,dx$.

1. Une tige occupe le segment $[0;2]$ (en mètres). Sa masse linéique est $\mu(x)=2+x$ (en kg/m).
   a. Calculer sa masse M.
   b. Calculer l'abscisse x_G de son centre d'inertie. Le résultat est-il cohérent ?
   c. Calculer son moment d'inertie J par rapport à l'axe perpendiculaire à la tige passant par O.
2. Une tige homogène de longueur $L=1{,}2$ m et de masse $M=0{,}5$ kg occupe le segment $[0;L]$. Calculer son moment d'inertie par rapport à l'axe perpendiculaire passant par O, en utilisant $\mu=\dfrac{M}{L}$.
3. Une plaque homogène a la forme du domaine limité par la courbe de $f(x)=\sqrt{x}$, l'axe des abscisses et la droite $x=4$.
   a. Calculer son aire $\mathcal{A}$.
   b. Calculer les coordonnées de son centre d'inertie G.

SenAcad, une solution de BarroTech

S1-S3 Exercices de la leçon 8

Exercice 12 : valeur moyenne et changement de variable

1. Calculer la valeur moyenne de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0;4]$, et trouver le réel c de $[0;4]$ où elle est atteinte.
2. Calculer la valeur moyenne de $x \mapsto \sin^2 x$ sur $[0;\pi]$.
3. À l'aide d'un changement de variable affine, calculer :
   a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2t+1}$ b. $\displaystyle\int_1^2 e^{3-2t}\,dt$ c. $\displaystyle\int_0^1 (2t-1)^5\,dt$
4. Sans chercher de primitive, calculer :
   a. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x\,dx$ b. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^4 + x)\,dx$
5. Soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi} t\sin t\,dt$. À l'aide du changement de variable $u = \pi - t$, montrer que $I = \pi\displaystyle\int_0^{\pi} \sin u\,du - I$. En déduire I.
6. Un mobile a pour vitesse $v(t) = 6t - 3t^2$ (en m/s) pour $t \in [0;2]$. Calculer son déplacement entre $t=0$ et $t=2$, puis sa vitesse moyenne.

Exercice 13 : intégrales trigonométriques

Calculer les intégrales suivantes.

SenAcad, une solution de BarroTech

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx$. *Commencer par montrer que* $\sin^4 x = \dfrac{3 - 4\cos(2x) + \cos(4x)}{8}$.
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\cos x\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\sin(3x)\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^3 x\,dx$