Corrigés détaillés

TERMINALE S · CHAPITRE 5 · CALCUL INTÉGRAL

Chaque résultat a été vérifié par calcul formel. Les rappels de méthode sont en italique.

Exercice 1

On écrit une primitive entre crochets, puis on calcule « borne du haut moins borne du bas ».

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2}(3x^2-2x+1)\,dx=\Big[x^3-x^2+x\Big]_{-1}^{2}=(8-4+2)-(-1-1-1)=6+3=9.$
2. $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\Big[2\sqrt{x}\Big]_{1}^{4}=4-2=2.$
3. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1.$
4. $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^2}=\Big[-\frac{1}{x}\Big]_{1}^{2}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$
5. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2}e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_{0}^{\ln 2}=2-1=1.$
6. $\displaystyle\int_{1}^{e^2}\frac{dx}{x}=\Big[\ln x\Big]_{1}^{e^2}=2-0=2.$
7. $\displaystyle\int_{2}^{0}(x^3-x)\,dx=\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\Big]_{2}^{0}=0-(4-2)=-2.$ *La borne du haut est 0.*
8. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_{-\pi}^{\pi}=-\cos\pi+\cos(-\pi)=1-1=0.$ *Les deux arches, l'une au-dessus de l'axe, l'autre au-dessous, se compensent.*

Exercice 2

Partie A

1. $\displaystyle\int_{0}^{3}(2x+1)\,dx=\Big[x^2+x\Big]_{0}^{3}=12$. La fonction $x\mapsto 2x+1$ est positive sur $[0;3]$: l'intégrale est l'aire du trapèze de bases $f(0)=1$ et $f(3)=7$, de hauteur 3, soit $\dfrac{(1+7)\times 3}{2}=12$ u.a.
2. Si $y=\sqrt{9-x^2}$, alors $y\geq 0$ et $y^2=9-x^2$, donc $x^2+y^2=9$, c'est-à-dire $OM=3$. La courbe de g est le **demi-cercle** de centre O et de rayon 3 situé au-dessus de l'axe des abscisses. Comme $g\geq 0$, les intégrales sont des aires :

$$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{\pi\times 3^2}{2}=\frac{9\pi}{2}\qquad\int_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{9\pi}{4}\ \text{(un quart de disque)}.$$

3. 1 u.a. $=2\times 1=2$ cm², donc l'aire du trapèze vaut $12\times 2=24$ cm².

Partie B

1. a. $F(0) = \displaystyle\int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$.

   b. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le cours, F est sa primitive qui s'annule en 0 : F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   c. $F'(x) > 0$, donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $F(0) = 0$: $F(x) < 0$ pour $x < 0$, et $F(x) > 0$ pour $x > 0$.

2. La position $x(t)$ est une primitive de la vitesse. Le déplacement vaut

$$\int_1^3 (3t^2 - 2t)\,dt = \Big[t^3 - t^2\Big]_1^3 = (27 - 9) - (1 - 1) = 18 \text{ m}.$$

Exercice 3

1. a. Relation de Chasles : $\displaystyle\int_0^5 f = \int_0^2 f + \int_2^5 f = 3 - 1 = 2$.

   b. $\displaystyle\int_2^0 f = -\int_0^2 f = -3$.

   c. $\displaystyle\int_5^0 (2f - 3g) = -\left(2\int_0^5 f - 3\int_0^5 g\right) = -(4 - 12) = 8$.

2. $|x-2| = 2 - x$ sur $[0;2]$ et $|x-2| = x - 2$ sur $[2;3]$. Par Chasles :

$$\int_0^3 |x-2|\,dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3 = 2 + \left(-\frac{3}{2} + 2\right) = \frac{5}{2}.$$

3. $f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1$: f est continue en 1 (et sur $[0;2]$). Par Chasles :

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2x-1)\,dx = \frac{1}{3} + \Big[x^2 - x\Big]_1^2 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}.$$

4. $\displaystyle\int_0^1 \left(2e^x - 3x^2\right) dx = \Big[2e^x - x^3\Big]_0^1 = (2e - 1) - 2 = 2e - 3$.

5. a. Sur $[0;1]$, $x^2 - x = x(x-1) \leq 0$, et les bornes sont dans l'ordre croissant : l'intégrale est **négative** (elle vaut $-\frac{1}{6}$).

   b. Sur $[1;2]$, $\ln x \geq 0$, donc $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,dx \geq 0$, et $\displaystyle\int_2^1 \ln x\,dx = -\int_1^2 \ln x\,dx$ est **négative**. *Attention à l'ordre des bornes.*

6. Sur $[1;2]$, x^3 croît de 1 à 8, donc $\dfrac{1}{1+x^3}$ décroît de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{9}$: $\frac{1}{9} \leq \dfrac{1}{1+x^3} \leq \frac{1}{2}$. L'inégalité de la moyenne, avec $b - a = 1$, donne le résultat.

7. a. Sur $[0;1]$, $0 \leq x^2 \leq 1$, donc $1 \leq e^{x^2} \leq e$ ($\exp$ est croissante). On intègre sur un intervalle de longueur 1 : $1 \leq J \leq e$.

   b. Sur $[0;1]$, $x^2 \leq x$, donc $e^{x^2} \leq e^x$, et $J \leq \displaystyle\int_0^1 e^x\,dx = e - 1 \approx 1{,}72$. Finalement $1 \leq J \leq e - 1$.

8. Les bornes sont dans l'ordre croissant, et $|\cos(10x)| \leq 1$:

$$\left|\int_0^1 \frac{\cos(10x)}{1+x}\,dx\right| \leq \int_0^1 \frac{|\cos(10x)|}{1+x}\,dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln 2.$$

Exercice 4

On reconnaît une forme du tableau de la leçon 3, en ajustant une constante.

1. $x(x^2+1)^3 = \dfrac{1}{2}\times 2x(x^2+1)^3$, forme $u'u^3$: $\displaystyle\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{16-1}{8} = \frac{15}{8}$.
2. Forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2+1 > 0$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\Big[\ln(x^2+1)\Big]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.
3. $\displaystyle\int_0^1 e^{2x-1}\,dx = \left[\frac{e^{2x-1}}{2}\right]_0^1 = \frac{e-e^{-1}}{2}$.
4. $\dfrac{1}{x\ln x} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}$, forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u = \ln x > 0$ sur $[e;e^2]$: $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x} = \Big[\ln(\ln x)\Big]_e^{e^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.
5. Avec $u = \cos x > 0$ sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$, $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = -\dfrac{u'}{u^2}$, dont une primitive est $\dfrac{1}{u}$: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2-1 = 1$.
6. Forme $u'u^3$ avec $u = \sin x$: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^3 x\,dx = \left[\frac{\sin^4 x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$.
7. Forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u = x+1$: $\displaystyle\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \Big[2\sqrt{x+1}\Big]_0^3 = 4-2 = 2$.
8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$.
9. Pour $x>0$, $\dfrac{x^2+x+1}{x} = x+1+\dfrac{1}{x}$: $\displaystyle\int_1^2\left(x+1+\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}+x+\ln x\right]_1^2 = (4+\ln 2)-\frac{3}{2} = \frac{5}{2}+\ln 2$.

SenAcad, une solution de BamTech

Exercice 5

On choisit pour u le facteur qui se simplifie en dérivant : le polynôme, ou $\ln x$.

1. a. $u = x$, $v' = e^{-x}$; $u' = 1$, $v = -e^{-x}$:

$$\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx = \Big[-x\,e^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-1} + \big(1-e^{-1}\big) = 1-\frac{2}{e}.$$

b. $u = x$, $v' = \cos x$; $u' = 1$, $v = \sin x$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}-1.$$

c. $u = \ln x$, $v' = x$; $u' = \frac{1}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$:

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e\frac{x}{2}\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

d. $u = \ln x$, $v' = 1$; $u' = \frac{1}{x}$, $v = x$:

$$\int_1^2\ln x\,dx = \Big[x\ln x\Big]_1^2 - \int_1^2 1\,dx = 2\ln 2 - 1.$$

2. Première intégration par parties : $u = x^2$, $v' = \sin x$; $u' = 2x$, $v = -\cos x$:

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx = \Big[-x^2 \cos x \Big]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} x \cos x \, dx = \pi^2 + 2\int_0^{\pi} x \cos x \, dx.$$

Seconde : $u = x$, $v' = \cos x$: $\displaystyle\int_0^{\pi} x \cos x \, dx = \Big[x \sin x \Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 0 - 2 = -2$. Donc

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx = \pi^2 - 4.$$

3. a. $u = \sin x$, $v' = e^x$; $u' = \cos x$, $v = e^x$: $I = \Big[e^x \sin x \Big]_0^{\pi} - \displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx = 0 - J = -J$.

b. $u = \cos x$, $v' = e^x$; $u' = -\sin x$, $v = e^x$: $J = \Big[e^x \cos x \Big]_0^{\pi} + \displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx = (-e^{\pi} - 1) + I$.

c. On remplace J par $-I$: $-I = -1 - e^{\pi} + I$, donc $2I = 1 + e^{\pi}$:

$$I = \frac{1 + e^{\pi}}{2} \qquad J = -\frac{1 + e^{\pi}}{2}.$$

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 6

1. a. $\displaystyle\int_0^3 (x^2-2x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^3 = 9-9 = 0.$

   b. $f(x)=x(x-2)$: $f\le 0$ sur $[0;2]$ et $f\ge 0$ sur $[2;3]$. Or $\displaystyle\int_0^2 f = \frac{8}{3}-4 = -\frac{4}{3}$ et $\displaystyle\int_2^3 f = 0-\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$. L'aire vaut

   $$\mathcal{A} = \frac{4}{3}+\frac{4}{3} = \frac{8}{3}\ \text{u.a.}$$

   L'intégrale est nulle parce que la partie sous l'axe est comptée négativement et compense exactement la partie au-dessus. L'aire, elle, compte les deux positivement.

2. a. $x^2 = x+2 \iff x^2-x-2=0 \iff x=-1$ ou $x=2$. Et $(x+2)-x^2 = -(x+1)(x-2)\ge 0$ sur $[-1;2]$: la droite $\mathcal{D}$ est au-dessus de $\mathcal{P}$ entre ces points.

   b.

   $$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{10}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{9}{2}\ \text{u.a.}$$

   c. 1 u.a. $= 1\times 2 = 2$ cm², donc $\mathcal{A} = 9$ cm².

3. $\sqrt{x} = x^2 \iff x=0$ ou $x=1$ (sur $[0;+\infty[$), et $x^2\le\sqrt{x}$ sur $[0;1]$. Donc

   $$\mathcal{A} = \int_0^1 \left(\sqrt{x}-x^2\right)dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\ \text{u.a.}$$

SenAcad, une solution de Barrolech

Exercice 7

1. Pour $x\ge 0$, $x\ge 0$ et $e^{-x}>0$, donc $f(x)\ge 0$ (nul seulement en 0).

2. $u=x$, $v'=e^{-x}$; $u'=1$, $v=-e^{-x}$:

   $$A(\lambda) = \Big[-x\,e^{-x}\Big]_0^{\lambda} + \int_0^{\lambda} e^{-x}\,dx = -\lambda e^{-\lambda} + 1 - e^{-\lambda} = 1-(\lambda+1)e^{-\lambda}.$$

3. Comme $f\ge 0$, $A(\lambda)$ est l'aire, en u.a., du domaine limité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=\lambda$. On a $A(2) = 1-3e^{-2}\approx 0{,}594$ u.a. Avec une unité de 2 cm, 1 u.a. $=4$ cm², donc l'aire vaut environ $2{,}38$ cm².

4. Par croissance comparée, $\lambda e^{-\lambda}\to 0$, et $e^{-\lambda}\to 0$. Donc $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = 1$. *Le domaine est illimité vers la droite, mais son aire « tend » vers 1 u.a.*

5. Pour $x\ge 0$, $e^{-x}\le 1$, donc $x\,e^{-x}\le x$: la droite est au-dessus de $\mathcal{C}$. L'aire vaut

   $$\int_0^1 \left(x-x\,e^{-x}\right)dx = \frac{1}{2}-A(1) = \frac{1}{2}-\left(1-\frac{2}{e}\right) = \frac{2}{e}-\frac{1}{2}\approx 0{,}236\ \text{u.a.},$$

   soit environ $0{,}94$ cm².

Exercice 8

1. a. $S(z) = \pi\left(2 + \dfrac{z}{5}\right)^2$.

   b. Forme $f(az+b)$: une primitive de $\left(2+\frac{z}{5}\right)^2$ est $\dfrac{5}{3}\left(2+\dfrac{z}{5}\right)^3$. Donc

   $$V = \pi\int_0^{10}\left(2+\frac{z}{5}\right)^2 dz = \pi \times \frac{5}{3}\left(4^3 - 2^3\right) = \frac{280\pi}{3} \approx 293{,}2 \text{ cm}^3,$$

   soit environ $29{,}3$ cL.

2. $S(z) = \left(\dfrac{2z}{3}\right)^2 = \dfrac{4z^2}{9}$, donc $V = \displaystyle\int_0^6 \frac{4z^2}{9}\,dz = \frac{4}{9}\times\frac{6^3}{3} = 32$ u.v. Vérification : $B = 4^2 = 16$ et $\dfrac{Bh}{3} = \dfrac{16\times 6}{3} = 32$.

3. $V = \pi\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \pi\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} \approx 4{,}93$ u.v.

4. $V(a) = \pi\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{x^2} = \pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = \pi\left(1 - \frac{1}{a}\right)$, et $\lim\limits_{a\to+\infty} V(a) = \pi$.

5. $V = \displaystyle\int_{R-h}^{R}\pi(R^2 - z^2)\,dz = \pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{R-h}^{R}$. En développant :

   $$V = \pi\left[\frac{2R^3}{3} - R^2(R-h) + \frac{(R-h)^3}{3}\right] = \frac{\pi}{3}\left(3Rh^2 - h^3\right) = \frac{\pi h^2(3R-h)}{3}.$$

   Pour $h = 2R$: $V = \dfrac{\pi\times 4R^2\times R}{3} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, le volume de la boule.

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 9

1. a. $(1-t+t^2)(1+t) = 1+t^3 \geq 1$ pour $t \geq 0$; en divisant par $1+t>0$: $\dfrac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$. Et $(1-t)(1+t) = 1 - t^2 \leq 1$, d'où $1 - t \leq \dfrac{1}{1+t}$.

   b. Soit $x \geq 0$. On intègre entre 0 et x (bornes dans l'ordre croissant). Comme $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x)$, on obtient

   $$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

   c. Pour $x = 0{,}2$: $0{,}2 - 0{,}02 = 0{,}18$ et $0{,}18 + \frac{0{,}008}{3} \approx 0{,}18267$. Donc $0{,}18 \leq \ln(1{,}2) \leq 0{,}1827$, encadrement d'amplitude $0{,}0027 < 0{,}003$. *La calculatrice donne* $\ln(1{,}2) \approx 0{,}1823$.

2. a. Pour $t \geq 0$, $e^t \geq 1$. Pour $x \geq 0$: $\displaystyle\int_0^x e^t\,dt \geq \int_0^x 1\,dt$, soit $e^x - 1 \geq x$.

   b. Pour $t \geq 0$, $e^t \geq 1 + t$. On intègre entre 0 et x : $e^x - 1 \geq x + \dfrac{x^2}{2}$, d'où $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 10

1. $f'(x) = -2x\,e^{-x^2} \leq 0$ sur $[0;1]$: f est décroissante.
2. $R_4 = 0{,}25 \times (1 + 0{,}9394 + 0{,}7788 + 0{,}5698) = 0{,}25 \times 3{,}2880 = 0{,}8220$ et $R'_4 = 0{,}25 \times (0{,}9394 + 0{,}7788 + 0{,}5698 + 0{,}3679) = 0{,}25 \times 2{,}6559 \approx 0{,}6640$.
   Sur chaque intervalle $[x_k; x_{k+1}]$, f décroît, donc $f(x_{k+1}) \leq f(x) \leq f(x_k)$. L'inégalité de la moyenne donne $h\,f(x_{k+1}) \leq \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f \leq h\,f(x_k)$. En additionnant (relation de Chasles) : $R'_4 \leq I \leq R_4$, soit $0{,}6640 \leq I \leq 0{,}8220$.
3. $T_4 = \dfrac{0{,}8220 + 0{,}6640}{2} = 0{,}7430$ et $M_4 = 0{,}25 \times (0{,}9845 + 0{,}8688 + 0{,}6766 + 0{,}4650) = 0{,}25 \times 2{,}9949 \approx 0{,}7487$.
4. $|T_4 - I| \approx 0{,}004$ et $|M_4 - I| \approx 0{,}002$: ici, la méthode des tangentes est la plus précise, celle des trapèzes la suit de près. L'encadrement par les rectangles ($0{,}664 \leq I \leq 0{,}822$, amplitude $0{,}158$) est bien meilleur que celui du cours ($0{,}632 \leq I \leq 1$, amplitude $0{,}368$).

SenAcad, une solution de BarroTech

S2-S4 Exercice 11

1. a. $M = \displaystyle\int_0^2 (2+x)\,dx = \left[2x + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 6$ kg.

   b. $\displaystyle\int_0^2 x(2+x)\,dx = \left[x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{20}{3}$, donc $x_G = \dfrac{20/3}{6} = \dfrac{10}{9} \approx 1{,}11$ m. C'est un peu plus que le milieu (1 m) : la tige est plus lourde du côté de $x = 2$, ce qui est cohérent.

   c. $J = \displaystyle\int_0^2 x^2(2+x)\,dx = \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{16}{3} + 4 = \frac{28}{3} \approx 9{,}33$ kg·m².

2. $\mu = \dfrac{0{,}5}{1{,}2} = \dfrac{5}{12}$ kg/m, et $J = \displaystyle\int_0^{1{,}2} \mu x^2\,dx = \mu \times \frac{1{,}2^3}{3} = \frac{ML^2}{3} = \frac{0{,}5 \times 1{,}44}{3} = 0{,}24$ kg·m².

3. a. $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$ u.a.

   b. $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x}\,dx = \int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{64}{5}$, donc $x_G = \dfrac{3}{16} \times \dfrac{64}{5} = \dfrac{12}{5}$.

   $\displaystyle\int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \int_0^4 x\,dx = 8$, donc $y_G = \dfrac{1}{2 \times \frac{16}{3}} \times 8 = \dfrac{3}{4}$. Ainsi $G\left(\dfrac{12}{5}; \dfrac{3}{4}\right)$.

S1-S3 Exercice 12

1. $\mu = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{4} \times \frac{16}{3} = \frac{4}{3}$. On cherche c tel que $\sqrt{c} = \frac{4}{3}$: $c = \dfrac{16}{9} \approx 1{,}78$, qui est bien dans $[0;4]$.

SenAcad, une solution de BarroTech

2. $\mu = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$ (calcul de l'exercice 8, question 3).

3. a. $u = 2t+1$, $dt = \frac{du}{2}$, u va de 1 à 3 : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2t+1} = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{du}{u} = \frac{\ln 3}{2}$.

   b. $u = 3-2t$, $dt = -\frac{du}{2}$, u va de 1 à -1 : $\displaystyle\int_1^2 e^{3-2t}\,dt = -\frac{1}{2}\int_1^{-1} e^u\,du = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 e^u\,du = \frac{e - e^{-1}}{2}$.

   c. $u = 2t-1$, u va de -1 à 1 : $\displaystyle\int_0^1 (2t-1)^5\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 u^5\,du = 0$, car $u \mapsto u^5$ est impaire.

4. a. $x \mapsto x^2 \sin x$ est impaire : l'intégrale vaut 0.

   b. $x \mapsto x$ est impaire et $x \mapsto x^4$ est paire : $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^4 + x)\,dx = 2\int_0^1 x^4\,dx + 0 = \frac{2}{5}$.

5. Avec $u = \pi - t$: $t = \pi - u$, $\sin t = \sin(\pi - u) = \sin u$, $dt = -du$, et u va de π à 0.

$$I = \int_\pi^0 (\pi - u)\sin u\,(-du) = \int_0^\pi (\pi - u)\sin u\,du = \pi\int_0^\pi \sin u\,du - I.$$

   Comme $\displaystyle\int_0^\pi \sin u\,du = 2$, on obtient $2I = 2\pi$, donc $I = \pi$. *On retrouve le résultat obtenu par intégration par parties dans le cours.*

6. Déplacement : $\displaystyle\int_0^2 (6t - 3t^2)\,dt = \left[3t^2 - t^3\right]_0^2 = 12 - 8 = 4$ m. Vitesse moyenne : $\dfrac{4}{2} = 2$ m/s.

S1-S3 Exercice 13

1. $\cos^3 x = \cos x\,(1-\sin^2 x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.
3. $\sin^4 x = \left(\dfrac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 = \dfrac{1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4}$, et $\cos^2(2x) = \dfrac{1+\cos(4x)}{2}$, d'où $\sin^4 x = \dfrac{3 - 4\cos(2x) + \cos(4x)}{8}$. Donc
$$\int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx = \left[\frac{3x}{8} - \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32}\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi}{8}.$$
4. $\cos(2x)\cos x = \dfrac{\cos x + \cos(3x)}{2}$: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\cos x\,dx = \frac{1}{2}\left[\sin x + \frac{\sin(3x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.
5. $\sin(2x)\sin(3x) = \dfrac{\cos x - \cos(5x)}{2}$: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\sin(3x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\sin x - \frac{\sin(5x)}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$.
6. $\sin^2 x \cos^3 x = \sin^2 x\,(1-\sin^2 x)\cos x = \cos x \sin^2 x - \cos x \sin^4 x$, formes $u'u^n$ avec $u = \sin x$:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x\,dx = \left[\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.$$

SenAcad, une solution de BarroTech