Exercices

TERMINALE S · CHAPITRE 4 · SUITES NUMÉRIQUES

Deux exercices par leçon. Les exercices 11 et 12 sont réservés aux séries S1, S3 et S1A. Corrigés détaillés : `04_corriges.md`.

Leçon 1 : raisonnement par récurrence, sens de variation

Exercice 1 : raisonner par récurrence

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est divisible par 3.
3. On veut comparer 2^n et n^2.
   - **a.** Vérifier que l'inégalité $2^n \geq n^2$ est fausse pour $n = 3$ et vraie pour $n = 4$.
   - **b.** Montrer que $(n+1)^2 \leq 2n^2$ pour tout entier $n \geq 3$. *Indication : étudier le signe de $2n^2 - (n+1)^2 = (n-1)^2 - 2$.*
   - **c.** En déduire, par récurrence, que $2^n \geq n^2$ pour tout entier $n \geq 4$.
4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$. Calculer u_1, u_2 et u_3, conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis la démontrer par récurrence.

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 2 : sens de variation, suites bornées

1. Soit $u_n = n^2 - 5n + 1$.
   - **a.** Calculer $u_{n+1} - u_n$ et étudier son signe.
   - **b.** En déduire le sens de variation de (u_n) et son plus petit terme.
2. Soit $v_n = \dfrac{2n - 1}{n + 3}$.
   - **a.** Étudier le sens de variation de (v_n).
   - **b.** Vérifier que $v_n = 2 - \dfrac{7}{n+3}$, puis en déduire que $-\dfrac{1}{3} \leq v_n < 2$ pour tout n.
3. Soit $w_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ pour $n \geq 1$.
   - **a.** Calculer w_1, w_2, w_3, w_4 et w_5.
   - **b.** Montrer que $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1 \iff (n+1)^2 \leq 2n^2$.
   - **c.** En utilisant l'exercice 1, en déduire que (w_n) est décroissante à partir du rang 3.
4. Soit $t_n = \cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$. Calculer t_0, t_1, t_2 et t_3. Montrer que (t_n) est périodique de période 3. Est-elle monotone ?

Leçon 2 : limite d'une suite

Exercice 3 : calculer des limites

Déterminer la limite de chaque suite.

1. $u_n = \dfrac{3n^2 - n + 2}{1 - 2n^2}$
2. $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$ *Indication : utiliser l'expression conjuguée.*
3. $u_n = \dfrac{n + 2\sin n}{n + 1}$ *Indication : encadrer $\sin n$.*
4. $u_n = n^2 + (-1)^n\, n$ *Indication : minorer u_n.*
5. $u_n = (2n + 1)\, e^{-n}$
6. $u_n = \dfrac{\cos n}{n^2 + 1}$
7. $u_n = \ln(2n + 1) - \ln n$, pour $n \geq 1$

Exercice 4 : deux sommes

Partie A. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.
2. Montrer que la suite (S_n) est croissante.
3. Montrer par récurrence que $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.
4. En déduire que (S_n) est majorée par 1, puis calculer sa limite.

Partie B. Pour $n \geq 1$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Justifier que $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$.
2. En déduire que $T_n \geq \sqrt{n}$.
3. Déterminer la limite de (T_n). Cette suite est-elle majorée ?

Leçon 3 : suites arithmétiques et géométriques

Exercice 5 : calculs et limites

1. (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_3 = 7$ et $u_{10} = 28$. Déterminer sa raison, u_0, l'expression de u_n, puis la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{30}$.
2. (v_n) est une suite géométrique à termes positifs telle que $v_1 = 2$ et $v_4 = 54$. Déterminer sa raison, v_0, l'expression de v_n, puis la somme $S' = v_1 + v_2 + \cdots + v_6$.

3. Déterminer la limite de chaque suite.
   - **a.** $(-0{,}7)^n$
   - **b.** $2^n - 3^n$ *Indication : factoriser par 3^n.*
   - **c.** $\dfrac{2^n + 5^n}{5^n - 1}$
   - **d.** $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$
4. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $0{,}95^n < 0{,}01$.

Exercice 6 : un modèle d'évolution

Une association compte 500 adhérents au 1^{er} janvier 2026. On fait l'hypothèse que, chaque année, $10\,\%$ des adhérents ne renouvellent pas leur adhésion et que 80 nouvelles personnes adhèrent. On note u_n le nombre d'adhérents au 1^{er} janvier de l'année $2026 + n$. Ainsi $u_0 = 500$.

1. Calculer u_1 et u_2, puis justifier que $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 80$ pour tout n.
2. On pose $v_n = u_n - 800$. Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
3. En déduire que $u_n = 800 - 300 \times 0{,}9^n$.
4. Étudier le sens de variation de (u_n).
5. Déterminer la limite de (u_n) et l'interpréter. L'association atteindra-t-elle 800 adhérents ?
6. En quelle année le nombre d'adhérents dépassera-t-il 700 pour la première fois ?

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 4 : suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 7 : image d'une suite, représentation graphique

1. Déterminer la limite de chaque suite, pour $n \geq 1$.
   - **a.** $\sqrt{9 + \dfrac{2}{n}}$
   - **b.** $e^{-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$
   - **c.** $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$
2. Soit $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ et la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   - **a.** Calculer u_1, puis des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_2 et u_3.
   - **b.** Dans un repère orthonormé (unité : 2 cm), tracer la courbe de f sur $[0\,;5]$ et la droite Δ d'équation $y = x$. Représenter u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses. Que peut-on conjecturer ?
   - **c.** Résoudre l'équation $f(x) = x$ et comparer avec la conjecture.

3. Soit $g(x) = \dfrac{6}{x+1}$ et la suite définie par $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = g(v_n)$.
   - **a.** Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4 (valeurs exactes).
   - **b.** La suite (v_n) est-elle monotone ?
   - **c.** Représenter les premiers termes comme à la question 2, sur $[0\,;6]$. Que peut-on conjecturer ? Résoudre $g(x) = x$ sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 8 : étude complète d'une suite récurrente

Soit $f(x) = \dfrac{4x+2}{x+3}$ pour $x \geq 0$, et la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie A

1. Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$. Calculer $f(0)$ et $f(2)$.
2. Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout n.
3. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
4. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

Partie B On pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$; préciser v_0.
2. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
3. Retrouver la limite de (u_n).

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 5 : accroissements finis et valeur approchée d'une limite

Exercice 9 : une vitesse de convergence

Soit $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$, $I = \left[\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{3}{2}\right]$, et la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier le sens de variation de f sur I. Montrer que $f(I) \subset I$, puis que $u_n \in I$ pour tout n.
2. Montrer que 1 est le seul réel x de I tel que $f(x) = x$.
3. Montrer que $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ pour tout $x \in I$.
4. En déduire que $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2}\,|u_n - 1|$, puis que $|u_n - 1| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout n.
5. Déterminer la limite de (u_n).
6. Déterminer un entier n pour lequel u_n est une valeur approchée de 1 à 10^{-3} près, et calculer ce terme.

Exercice 10 : une limite qu'on ne sait pas calculer

On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

1. Soit $h(x) = \cos x - x$ sur $[0\,;1]$. Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution α dans $[0\,;1]$, et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

2. Montrer que l'intervalle $[0\,;1]$ est stable par la fonction cosinus, puis que $u_n \in [0\,;1]$ pour tout n.
3. Montrer que $|\cos'(x)| \leq \sin 1$ pour tout $x \in [0\,;1]$.
4. En déduire que $|u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n$ pour tout n, puis la limite de (u_n).
5. On donne $\sin 1 \approx 0{,}841$. À partir de quel rang n est-on sûr que u_n est une valeur approchée de α à 10^{-2} près ?

S1-S3 Exercices de compléments

Exercice 11 : suites de référence, image d'une suite par une fonction

1. Déterminer la limite de chaque suite.
   - **a.** $\dfrac{n^3}{2^n}$
   - **b.** $\dfrac{(\ln n)^3}{n}$ *Indication :* $\dfrac{(\ln n)^3}{n} = \left(\dfrac{\ln n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^3$.
   - **c.** $\dfrac{3^n - n^{10}}{2^n + n^2}$
   - **d.** $n^{100} \times 0{,}9^n$
   - **e.** $n^{\frac{1}{n}}$, pour $n \geq 1$
2. Déterminer la limite de chaque suite, pour $n \geq 1$.
   - **a.** $\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$
   - **b.** $n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$
   - **c.** $\sqrt{n}\,\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
   - **d.** $n \sin \dfrac{2}{n}$
3. Soit $u_n = \dfrac{n^5}{1{,}5^n}$ pour $n \geq 1$.
   - **a.** Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{1{,}5}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^5$.
   - **b.** En déduire que (u_n) est décroissante à partir du rang 12.
   - **c.** Déterminer la limite de (u_n).
   - **d.** Un élève calcule $u_1, \ldots, u_{10}$ à la calculatrice et conjecture que la suite tend vers $+\infty$. Commenter.

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 12 : le nombre e comme limite d'une suite

Partie A. Pour $x \geq 0$, on pose $h(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$ et $k(x) = x - \ln(1+x)$.

1. Étudier le sens de variation de h et de k sur $[0\,;+\infty[$.
2. En déduire que, pour tout $x \geq 0$: $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Partie B. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, et pour $x > 0$, $\varphi(x) = x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que $\varphi'(x) = h\left(\dfrac{1}{x}\right)$. En déduire que (u_n) est croissante.
2. Déterminer la limite de (u_n).
3. En déduire que $2 \leq u_n \leq e$ pour tout $n \geq 1$.

Partie C. Pour $n \geq 1$, on pose $v_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, et pour $x > 0$, $\psi(x) = (x+1)\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer la limite de (v_n).
2. Montrer que $\psi'(x) = -k\left(\dfrac{1}{x}\right)$. En déduire que (v_n) est décroissante, puis que $v_n \geq e$ pour tout $n \geq 1$.
3. Montrer que $0 \leq e - u_n \leq \dfrac{u_n}{n} \leq \dfrac{3}{n}$.
4. En déduire un entier n pour lequel u_n est une valeur approchée de e à 10^{-2} près.

SenAcad, une solution de BarroTech