Corrigés détaillés

TERMINALE S · CHAPITRE 4 · SUITES NUMÉRIQUES

Chaque résultat a été vérifié par calcul formel. Les rappels de méthode sont en italique.

Exercice 1

1. On note $\mathcal{P}(n)$: « $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».
   - **Initialisation.** Pour $n=1$: $1^2=1$ et $\dfrac{1\times2\times3}{6}=1$.
   - **Hérédité.** Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $1^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)\big(n(2n+1)+6(n+1)\big)}{6}=\dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$. Or $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$. On obtient $\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, qui est bien la formule au rang $n+1$.
   - **Conclusion.** La formule est vraie pour tout $n\geq1$.
2. On note $\mathcal{P}(n)$: « 4^n-1 est divisible par 3 ».
   - **Initialisation.** $4^0-1=0=3\times0$.
   - **Hérédité.** Si $4^n-1=3k$ avec k entier, alors $4^{n+1}-1=4\times4^n-1=4(4^n-1)+3=3(4k+1)$, qui est divisible par 3.
   - **Conclusion.** 4^n-1 est divisible par 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. *Comparaison de 2^n et n^2.*
   - **a.** Pour $n=3$: $2^3=8<9=3^2$, l'inégalité est fausse. Pour $n=4$: $2^4=16\geq16=4^2$, elle est vraie.
   - **b.** $2n^2-(n+1)^2=n^2-2n-1=(n-1)^2-2$. Pour $n\geq3$, $(n-1)^2\geq4$, donc $2n^2-(n+1)^2\geq2>0$, et $(n+1)^2\leq2n^2$.
   - **c.** *L'initialisation se fait au rang 4, pas au rang 0.* Pour $n=4$, c'est la question a. Si $2^n\geq n^2$ pour un entier $n\geq4$, alors $2^{n+1}=2\times2^n\geq2n^2\geq(n+1)^2$ d'après la question b. Donc $2^n\geq n^2$ pour tout $n\geq4$.
4. $u_1=\dfrac{1}{2}$, $u_2=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3}$, $u_3=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{4}$. On conjecture que $u_n=\dfrac{1}{n+1}$.
   - **Initialisation.** $u_0=1=\dfrac{1}{0+1}$.
   - **Hérédité.** Si $u_n=\dfrac{1}{n+1}$, alors $u_{n+1}=\dfrac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}}=\dfrac{1}{n+2}$.
   - **Conclusion.** $u_n=\dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

BarroTech

Exercice 2

1. *Avec $u_n = n^2 - 5n + 1$.*
   - **a.** $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 5(n+1) + 1 - (n^2 - 5n + 1) = 2n - 4$. Ce nombre est négatif pour $n \in \{0\,;1\}$, nul pour $n = 2$ et positif pour $n \geq 3$.
   - **b.** La suite décroît de u_0 à u_2 ($u_0 = 1$, $u_1 = -3$, $u_2 = -5$), puis elle est croissante à partir du rang 2 ($u_3 = -5$, $u_4 = -3$...). Son plus petit terme est $u_2 = u_3 = -5$. *La fonction $x \mapsto x^2 - 5x + 1$ a son minimum en $2{,}5$, qui n'est pas un entier : le minimum de la suite n'est pas $f(2{,}5) = -5{,}25$.*
2. *Avec $v_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$.*
   - **a.** $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2n+1}{n+4} - \dfrac{2n-1}{n+3} = \dfrac{(2n+1)(n+3) - (2n-1)(n+4)}{(n+3)(n+4)} = \dfrac{7}{(n+3)(n+4)} > 0$. La suite est strictement croissante.
   - **b.** $2 - \dfrac{7}{n+3} = \dfrac{2(n+3) - 7}{n+3} = \dfrac{2n-1}{n+3} = v_n$. Comme $\dfrac{7}{n+3} > 0$, on a $v_n < 2$. La suite est croissante, donc $v_n \geq v_0 = -\dfrac{1}{3}$.
3. *Avec $w_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.*
   - **a.** $w_1 = \dfrac{1}{2}$, $w_2 = 1$, $w_3 = \dfrac{9}{8}$, $w_4 = 1$, $w_5 = \dfrac{25}{32}$.
   - **b.** Les termes sont strictement positifs et $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^n}{n^2} = \dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$. Ce quotient est inférieur ou égal à 1 si et seulement si $(n+1)^2 \leq 2n^2$.
   - **c.** D'après l'exercice 1, question 3.b, $(n+1)^2 \leq 2n^2$ pour tout $n \geq 3$. Donc $w_{n+1} \leq w_n$ pour $n \geq 3$: la suite est décroissante à partir du rang 3. Elle ne l'est pas avant : $w_1 < w_2 < w_3$.
4. $t_0 = \cos 0 = 1$, $t_1 = \cos \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$, $t_2 = \cos \dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$, $t_3 = \cos(2\pi) = 1$. Pour tout n, $t_{n+3} = \cos\left(\dfrac{2n\pi}{3} + 2\pi\right) = t_n$: la suite est périodique de période 3. Elle n'est pas monotone : $t_1 < t_0$ mais $t_3 > t_2$.

Exercice 3

1. *Fonction rationnelle : on garde les termes de plus haut degré.* u_n a la même limite que $\dfrac{3n^2}{-2n^2} = -\dfrac{3}{2}$. **La limite vaut $-\dfrac{3}{2}$.**
2. *Forme $\infty - \infty$ avec une racine : expression conjuguée.* $u_n = \dfrac{(n^2+n) - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n} = \dfrac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}$. **La limite vaut $\dfrac{1}{2}$.**
3. Comme $-1 \leq \sin n \leq 1$: $\dfrac{n-2}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{n+2}{n+1}$. Les deux suites qui encadrent tendent vers 1. **Par le théorème des gendarmes, la limite vaut 1.**
4. Comme $(-1)^n n \geq -n$: $u_n \geq n^2 - n = n(n-1)$, qui tend vers $+\infty$. **Par minoration, la limite vaut $+\infty$.**

5. $u_n = 2n\,e^{-n} + e^{-n}$. Par croissance comparée, $n\,e^{-n} \to 0$, et $e^{-n} \to 0$. **La limite vaut 0.**
6. $|u_n| \leq \dfrac{1}{n^2+1}$, qui tend vers 0. **La limite vaut 0.**
7. $u_n = \ln \dfrac{2n+1}{n} = \ln\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)$. Comme $2 + \frac{1}{n} \to 2$ et que $\ln$ est continue en 2, **la limite vaut $\ln 2$.**

Exercice 4

Partie A

1. $S_1 = \dfrac{1}{2}$, $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$, $S_3 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{3}{4}$.
2. $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$: la suite est croissante.
3. **Initialisation.** $S_1 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1+1}$. **Hérédité.** Si $S_n = \dfrac{n}{n+1}$, alors $S_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n+1}{n+2}$. La formule est vraie pour tout $n \geq 1$.
4. $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} < 1$: la suite est majorée par 1. Elle est croissante et majorée, donc convergente, et $\lim S_n = 1$. *Ici on connaît la limite exacte, ce qui est rare : le théorème des suites monotones donne d'habitude seulement l'existence.*

Partie B

1. Pour $1 \leq k \leq n$, $\sqrt{k} \leq \sqrt{n}$ (la racine carrée est croissante), donc $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. T_n est une somme de n termes, chacun supérieur ou égal à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Donc $T_n \geq n \times \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.
3. $\sqrt{n} \to +\infty$, donc, par minoration, $\lim T_n = +\infty$. La suite n'est pas majorée : sinon, croissante et majorée, elle convergerait.

Exercice 5

1. $u_{10} = u_3 + 7r$, donc $7r = 21$ et $r = 3$. Puis $u_0 = u_3 - 3r = -2$ et $u_n = 3n - 2$. On a $u_{30} = 88$, et S compte 31 termes : $S = 31 \times \dfrac{-2 + 88}{2} = 31 \times 43 = 1333$.
2. $v_4 = v_1\,q^3$, donc $q^3 = 27$ et $q = 3$. Puis $v_0 = \dfrac{v_1}{q} = \dfrac{2}{3}$ et $v_n = \dfrac{2}{3} \times 3^n = 2 \times 3^{n-1}$. La somme S' compte 6 termes, de premier terme $v_1 = 2$: $S' = 2 \times \dfrac{1 - 3^6}{1 - 3} = 3^6 - 1 = 728$.

3. *Limites des suites géométriques.*
   - **a.** $-1 < -0{,}7 < 1$, donc $(-0{,}7)^n \to 0$.
   - **b.** $2^n - 3^n = 3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)$. La parenthèse tend vers -1 et $3^n \to +\infty$. **La limite vaut $-\infty$.**
   - **c.** On divise numérateur et dénominateur par 5^n : $\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}$. **La limite vaut 1.**
   - **d.** C'est la somme $1 + q + \cdots + q^n$ avec $q = \frac{1}{3}$: elle vaut $\dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$. **La limite vaut $\dfrac{3}{2}$.**
4. *On « prend le $\ln$ » : la fonction $\ln$ est strictement croissante. Attention, $\ln 0{,}95 < 0$ change le sens de l'inégalité.* $0{,}95^n < 0{,}01 \iff n \ln 0{,}95 < \ln 0{,}01 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}95} \approx 89{,}78$. **Le plus petit entier est $n = 90$.** Contrôle : $0{,}95^{89} \approx 0{,}0104$ et $0{,}95^{90} \approx 0{,}0099$.

Exercice 6

1. $u_1 = 0{,}9 \times 500 + 80 = 530$ et $u_2 = 0{,}9 \times 530 + 80 = 557$. Chaque année, il reste $90\,\%$ des adhérents, soit $0{,}9\,u_n$, auxquels s'ajoutent 80 nouveaux : $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 80$.
2. $v_{n+1} = u_{n+1} - 800 = 0{,}9\,u_n + 80 - 800 = 0{,}9\,u_n - 720 = 0{,}9(u_n - 800) = 0{,}9\,v_n$. (v_n) **est géométrique de raison** $0{,}9$, de premier terme $v_0 = 500 - 800 = -300$.
3. $v_n = -300 \times 0{,}9^n$, donc $u_n = v_n + 800 = 800 - 300 \times 0{,}9^n$.
4. $u_{n+1} - u_n = -300 \times 0{,}9^{n+1} + 300 \times 0{,}9^n = 300 \times 0{,}9^n(1 - 0{,}9) = 30 \times 0{,}9^n > 0$. **La suite est strictement croissante.**
5. $0 < 0{,}9 < 1$, donc $0{,}9^n \to 0$ et $\lim u_n = 800$. Selon ce modèle, le nombre d'adhérents se rapproche de 800. Il ne l'atteindra jamais, car $u_n = 800 - 300 \times 0{,}9^n < 800$ pour tout n.
6. $u_n > 700 \iff 300 \times 0{,}9^n < 100 \iff 0{,}9^n < \dfrac{1}{3} \iff n \ln 0{,}9 < -\ln 3 \iff n > \dfrac{\ln 3}{-\ln 0{,}9} \approx 10{,}43$. Donc $n = 11$: **en 2037**. Contrôle : $u_{10} \approx 695{,}4$ et $u_{11} \approx 705{,}9$.

Exercice 7

1. *On cherche la limite de « l'intérieur », puis on utilise la continuité.*
   - **a.** $9 + \frac{2}{n} \to 9$ et la racine carrée est continue en 9 : **la limite vaut 3.**
   - **b.** $-1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \to -1$ et $\exp$ est continue en -1 : **la limite vaut $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.**
   - **c.** $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \to 1$ et $\ln$ est continue en 1 : **la limite vaut $\ln 1 = 0$.**
2. *Avec $f(x) = \sqrt{3x + 4}$.*
   - **a.** $u_1 = \sqrt{4} = 2$, $u_2 = \sqrt{10} \approx 3{,}162$, $u_3 = \sqrt{3\sqrt{10} + 4} \approx 3{,}672$.
   - **b.** La courbe de f part du point $(0\,;2)$ et coupe Δ au point $(4\,;4)$. Le tracé forme un **escalier** qui monte vers ce point : on conjecture que (u_n) est croissante et converge vers 4.
   - **c.** Si $f(x) = x$, alors $x \geq 0$ et $3x + 4 = x^2$, soit $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1) = 0$. Comme $x \geq 0$, $x = 4$, ce qui confirme la conjecture sur la limite.

SenAcad, une solution de Barrolech

3. *Avec* $g(x) = \dfrac{6}{x+1}$.
   - **a.** $v_1 = 6$, $v_2 = \dfrac{6}{7}$, $v_3 = \dfrac{6}{\frac{13}{7}} = \dfrac{42}{13}$, $v_4 = \dfrac{6}{\frac{55}{13}} = \dfrac{78}{55}$.
   - **b.** Non : $v_1 > v_0$ mais $v_2 < v_1$.
   - **c.** La fonction g est décroissante : le tracé forme un **escargot** qui tourne autour du point d'intersection de la courbe et de Δ. On conjecture que la suite converge vers l'abscisse de ce point, ses termes étant alternativement au-dessus et au-dessous. Sur $[0\,;+\infty[$, $g(x) = x \iff x(x+1) = 6 \iff x^2 + x - 6 = 0 \iff x = 2$ (la racine -3 est rejetée). On conjecture donc $\lim v_n = 2$. *La conjecture est exacte ; sa démonstration n'est pas demandée ici.*

Exercice 8

Partie A

1. $f'(x) = \dfrac{4(x+3) - (4x+2)}{(x+3)^2} = \dfrac{10}{(x+3)^2} > 0$: f **est strictement croissante sur** $[0\,;+\infty[$. On a $f(0) = \dfrac{2}{3}$ et $f(2) = \dfrac{10}{5} = 2$.
2. **Initialisation.** $u_0 = 0 \in [0\,;2]$. **Hérédité.** Si $0 \leq u_n \leq 2$, alors, f étant croissante, $f(0) \leq f(u_n) \leq f(2)$, soit $\dfrac{2}{3} \leq u_{n+1} \leq 2$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.
3. **Initialisation.** $u_0 = 0 \leq u_1 = \dfrac{2}{3}$. **Hérédité.** Si $u_n \leq u_{n+1}$, alors $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. La suite est croissante.
4. (u_n) est croissante et majorée par 2 : elle converge vers un réel ℓ tel que $0 \leq \ell \leq 2$. La fonction f est continue en ℓ, donc $f(\ell) = \ell$: $4\ell + 2 = \ell(\ell+3)$, soit $\ell^2 - \ell - 2 = (\ell-2)(\ell+1) = 0$. Comme $\ell \geq 0$, $\lim u_n = 2$.

Partie B

1. *On exprime $u_{n+1} - 2$ et $u_{n+1} + 1$ en fonction de u_n.* $u_{n+1} - 2 = \dfrac{4u_n + 2 - 2u_n - 6}{u_n + 3} = \dfrac{2(u_n - 2)}{u_n + 3}$ et $u_{n+1} + 1 = \dfrac{4u_n + 2 + u_n + 3}{u_n + 3} = \dfrac{5(u_n + 1)}{u_n + 3}$. Donc $v_{n+1} = \dfrac{2(u_n - 2)}{5(u_n + 1)} = \dfrac{2}{5}\, v_n$: (v_n) **est géométrique de raison** $\dfrac{2}{5}$, avec $v_0 = \dfrac{0 - 2}{0 + 1} = -2$.
2. $v_n = -2\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$. De $v_n(u_n + 1) = u_n - 2$, on tire $u_n(1 - v_n) = 2 + v_n$, donc $u_n = \dfrac{2 + v_n}{1 - v_n} = \dfrac{2 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^n}$.
3. $\left(\frac{2}{5}\right)^n \to 0$, donc $\lim u_n = \dfrac{2}{1} = 2$, comme dans la partie A. Contrôle : la formule donne $u_1 = \dfrac{2 - \frac{4}{5}}{1 + \frac{4}{5}} = \dfrac{2}{3}$.

SesAcad, une solution de Barrolech

Exercice 9

1. $f'(x) = -\dfrac{3}{(x+2)^2} < 0$: f est décroissante sur I. Donc $f(I) = \left[f\left(\frac{3}{2}\right) ; f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[\dfrac{6}{7} ; \dfrac{6}{5}\right] \subset \left[\dfrac{1}{2} ; \dfrac{3}{2}\right]$. Comme $u_0 = \frac{1}{2} \in I$ et $f(I) \subset I$, une récurrence immédiate donne $u_n \in I$ pour tout n.
2. Pour $x \in I$: $f(x) = x \iff 3 = x(x+2) \iff x^2 + 2x - 3 = 0 \iff (x-1)(x+3) = 0$. Seul 1 est dans I.
3. Pour $x \in I$, $x + 2 \geq \dfrac{5}{2}$, donc $|f'(x)| = \dfrac{3}{(x+2)^2} \leq \dfrac{3}{\frac{25}{4}} = \dfrac{12}{25} \leq \dfrac{1}{2}$.
4. u_n et 1 sont dans I, et $f(1) = 1$. L'inégalité des accroissements finis donne $|f(u_n) - f(1)| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 1|$, soit $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 1|$. Par récurrence : $|u_0 - 1| = \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^1$, et si $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, alors $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$.
5. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \to 0$, donc $\lim u_n = 1$.
6. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3} \iff 2^{n+1} \geq 1000$, ce qui est vrai dès que $n + 1 \geq 10$ ($2^{10} = 1024$). Pour $n = 9$, $u_9 = \dfrac{34446}{34445} \approx 1{,}00003$ est une valeur approchée de 1 à 10^{-3} près. *L'écart réel est bien plus petit que la majoration : la méthode donne une garantie, pas l'écart exact.*

Exercice 10

1. $h'(x) = -\sin x - 1 < 0$ sur $[0\,;1]$ (car $\sin x \geq 0$ sur $[0\,;1]$). h est continue et strictement décroissante, avec $h(0) = 1 > 0$ et $h(1) = \cos 1 - 1 < 0$. D'après le théorème de la bijection, **l'équation $h(x) = 0$, c'est-à-dire $\cos x = x$, a une unique solution α dans $[0\,;1]$**. À la calculatrice, $h(0{,}73) \approx 0{,}015 > 0$ et $h(0{,}74) \approx -0{,}0015 < 0$, donc $0{,}73 < \alpha < 0{,}74$.
2. Le cosinus est décroissant sur $[0\,;1]$ (car $[0\,;1] \subset [0\,;\pi]$), donc l'image de $[0\,;1]$ est $[\cos 1\,;1]$. Comme $\cos 1 \approx 0{,}54 > 0$, cette image est contenue dans $[0\,;1]$. Puisque $u_0 = 0 \in [0\,;1]$, une récurrence donne $u_n \in [0\,;1]$ pour tout n.
3. $|\cos'(x)| = |\sin x| = \sin x$ sur $[0\,;1]$. Le sinus est croissant sur $[0\,;1]$, donc $\sin x \leq \sin 1$.
4. L'inégalité des accroissements finis, appliquée entre u_n et α (avec $\cos\alpha = \alpha$), donne $|u_{n+1} - \alpha| \leq (\sin 1)\,|u_n - \alpha|$. Par récurrence, $|u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n\,|u_0 - \alpha| = (\sin 1)^n\,\alpha \leq (\sin 1)^n$. Comme $0 < \sin 1 < 1$, $(\sin 1)^n \to 0$ et $\lim u_n = \alpha$.
5. $(\sin 1)^n \leq 10^{-2} \iff n \geq \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln(\sin 1)} \approx 26{,}7$. **À partir du rang 27**, u_n est une valeur approchée de α à 10^{-2} près. On trouve $\alpha \approx 0{,}739$.

Exercice 11

1. *Suites de référence et croissance comparée.*
   - **a.** Croissance comparée : $\dfrac{2^n}{n^3} \to +\infty$, donc $\dfrac{n^3}{2^n} \to 0$.
   - **b.** $\dfrac{\ln n}{n^{\frac{1}{3}}} \to 0$ (croissance comparée avec $\alpha = \frac{1}{3}$), et le cube d'une suite qui tend vers 0 tend vers 0. **La limite vaut 0.**
   - **c.** $\dfrac{3^n - n^{10}}{2^n + n^2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \times \dfrac{1 - \frac{n^{10}}{3^n}}{1 + \frac{n^2}{2^n}}$. La fraction tend vers $\dfrac{1-0}{1+0} = 1$ et $\left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty$. **La limite vaut $+\infty$.**
   - **d.** $n^{100} \times 0{,}9^n$ est de la forme $n^\alpha\, b^n$ avec $0 < b < 1$: **la limite vaut 0.**
   - **e.** $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}}$. Or $\dfrac{\ln n}{n} \to 0$ et $\exp$ est continue en 0. **La limite vaut 1.**
2. *On écrit chaque terme sous la forme $f(u_n)$ avec $u_n \to 0$.*
   - **a.** $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}$ et $n \ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right) = 2 \times \dfrac{\ln(1+X)}{X}$ avec $X = \dfrac{2}{n} \to 0$. L'exposant tend vers 2. **La limite vaut e^2.**
   - **b.** $n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \dfrac{e^X - 1}{X}$ avec $X = \frac{1}{n} \to 0$. **La limite vaut 1.**
   - **c.** $\sqrt{n}\, \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \times n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. Le second facteur tend vers 1 et le premier vers 0. **La limite vaut 0.**
   - **d.** $n \sin\dfrac{2}{n} = 2 \times \dfrac{\sin X}{X}$ avec $X = \dfrac{2}{n} \to 0$. **La limite vaut 2.**
3. *Avec $u_n = \dfrac{n^5}{1{,}5^n}$.*
   - **a.** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^5}{1{,}5^{n+1}} \times \dfrac{1{,}5^n}{n^5} = \dfrac{1}{1{,}5}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^5 = \dfrac{1}{1{,}5}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^5$.
   - **b.** $u_{n+1} \leq u_n \iff \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \leq 1{,}5 \iff 1 + \frac{1}{n} \leq 1{,}5^{\frac{1}{5}} \iff n \geq \dfrac{1}{1{,}5^{\frac{1}{5}} - 1} \approx 11{,}8$. Donc (u_n) est décroissante à partir du rang 12.
   - **c.** Croissance comparée : $\lim u_n = 0$.
   - **d.** De u_1 à u_{10}, la suite croît ($u_{10} \approx 1734$), et elle croît encore jusqu'à $u_{12} \approx 1918$. La conjecture de l'élève est fausse : la suite finit par décroître et tend vers 0. Les premiers termes ne suffisent jamais à conclure.

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 12

Partie A

1. $h'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{(1+x) - x}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2} \geq 0$: h est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
   $k'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} \geq 0$: k est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. $h(0) = 0$ et $k(0) = 0$. Comme ces fonctions sont croissantes, $h(x) \geq 0$ et $k(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$, ce qui donne $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Partie B

1. $\varphi'(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) + x \times \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$. Or $h\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$. Donc $\varphi'(x) = h\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$ et φ est croissante. Comme $u_n = e^{\varphi(n)}$ et que $\exp$ est croissante, (u_n) est croissante.
2. D'après l'exemple 19 du cours, $\lim u_n = e$.
3. (u_n) est croissante, donc $u_n \geq u_1 = 2$. Elle est croissante et converge vers e, donc $u_n \leq e$ pour tout n.

Partie C

1. $v_n = u_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, avec $u_n \to e$ et $1+\frac{1}{n} \to 1$. $\lim v_n = e$.
2. $\psi'(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) + (x+1) \times \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x} = -k\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 0$. Donc ψ est décroissante, et $(v_n) = \left(e^{\psi(n)}\right)$ aussi. Une suite décroissante qui converge vers e vérifie $v_n \geq e$ pour tout n.
3. $u_n \leq e \leq v_n$, donc $0 \leq e - u_n \leq v_n - u_n = u_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - u_n = \dfrac{u_n}{n} \leq \dfrac{e}{n} \leq \dfrac{3}{n}$.
4. $\dfrac{3}{n} \leq 10^{-2} \iff n \geq 300$. Pour $n = 300$, $u_{300} \approx 2{,}7138$ est une valeur approchée de e à 10^{-2} près (l'écart réel est d'environ $0{,}0045$).

SenAcad, une solution de Barrotech