Exercices

TERMINALE S · CHAPITRE 3 · LOGARITHME, EXPONENTIELLE ET PUISSANCES

Deux exercices par leçon. Les exercices 11 et 12 sont réservés aux séries S1, S3 et S1A. Corrigés détaillés : `04_corriges.md`.

Leçon 1 : le logarithme népérien, propriétés algébriques

Exercice 1 : calculer avec ln

1. Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:
   - **a.** $\ln 18$
   - **b.** $\ln \dfrac{16}{27}$
   - **c.** $\ln \sqrt{12}$
   - **d.** $\ln 48 - \ln 6 + \ln \dfrac{1}{4}$
2. Simplifier, pour tout réel $x > 0$:
   - **a.** $A = \ln(3x) + \ln\left(\dfrac{x}{3}\right) - 2\ln x$
   - **b.** $B = \ln(x^2 + x) - \ln(x + 1)$
3. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $1{,}5^n > 100$.

Exercice 2 : équations et inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en commençant chaque fois par l'ensemble de résolution.

1. $\ln(2x + 1) = \ln(x + 3)$
2. $\ln x + \ln(x - 2) = \ln 8$
3. $2\ln x = \ln(x + 2)$
4. $\ln(3 - x) \leq \ln(x + 1)$
5. $\ln(x^2 - 1) < \ln 3$

Leçon 2 : étude de la fonction ln

Exercice 3 : limites avec ln

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - 2x)$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln x\right]$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ *Indication : poser $X=\frac{1}{x}$.*

Exercice 4 : dérivées, primitives et étude d'une fonction

1. Calculer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.
   - **a.** $f_1(x)=\ln(x^2+2x+3)$ sur $\mathbb{R}$ (justifier d'abord que f_1 y est définie).
   - **b.** $f_2(x)=x\ln x-x$ sur $]0;+\infty[$.
   - **c.** $f_3(x)=\ln|2x-1|$ sur $]-\infty;\frac{1}{2}[$.
2. Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.
   - **a.** $g_1(x)=\dfrac{3}{3x+1}$ sur $]-\frac{1}{3};+\infty[$.
   - **b.** $g_2(x)=\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$ sur $\mathbb{R}$.
   - **c.** $g_3(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$.
3. Soit $f(x)=x-2\ln x$ sur $]0;+\infty[$.
   - **a.** Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
   - **b.** Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
   - **c.** En déduire que, pour tout réel $x>0$, $2\ln x<x$.
   - **d.** Étudier la branche infinie de la courbe de f en $+\infty$.

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 3 : la fonction exponentielle

Exercice 5 : calculer, résoudre

1. Simplifier, pour tout réel x :
   - **a.** $A=\dfrac{e^{2x}\times e^{1-x}}{e^{x+1}}$
   - **b.** $B=(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$
2. Calculer $C=e^{\ln 3+2\ln 2}$ et $D=\ln(e^3)-e^{-\ln 2}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   - **a.** $e^{2x-1}=e^{x+2}$
   - **b.** $e^{x^2}=e^{4x-3}$
   - **c.** $e^{2x}+e^x-6=0$
   - **d.** $e^{1-2x}\geq 1$
   - **e.** $e^{2x}-4e^x+3<0$
   - **f.** $e^x=-2$

Exercice 6 : une fonction avec exp

Soit $f(x) = \dfrac{e^x - 3}{e^x + 1}$ pour tout réel x.

1. Vérifier que $f(x) = 1 - \dfrac{4}{e^x + 1}$.
2. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement.
3. Montrer que $f'(x) = \dfrac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$ et dresser le tableau de variation de f.
4. Résoudre $f(x) = 0$, puis donner le signe de $f(x)$ selon x.
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Leçon 4 : composées, croissances comparées, primitives

Exercice 7 : limites

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - x^2\right)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 + 2\right) e^{-x}$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + x\right) e^x$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{x}$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 8 : étude d'une fonction et primitives

Partie A. Soit $f(x) = (x + 1)\, e^{-x}$ pour tout réel x, et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter la seconde.
2. Montrer que $f'(x) = -x\, e^{-x}$ et dresser le tableau de variation de f.
3. Étudier la branche infinie de $\mathcal{C}$ en $-\infty$.
4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1.
5. Vérifier que $F(x) = -(x + 2)\, e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B. Déterminer une primitive de chaque fonction sur $\mathbb{R}$.

1. $g(x) = 2x\, e^{x^2 - 1}$
2. $h(x) = e^{3x - 2}$
3. $k(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$
4. $m(x) = e^x \left(e^x + 1\right)^2$

Leçon 5 : puissances et logarithme décimal

Exercice 9 : puissances d'exposant rationnel

1. Calculer sans calculatrice : $27^{\frac{2}{3}}$, $16^{-\frac{3}{4}}$ et $32^{\frac{2}{5}}$.
2. Simplifier, pour $x > 0$: $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{1}{6}}}$.
3. Résoudre l'équation $x^{\frac{3}{2}} = 8$ sur $]0;+\infty[$.
4. Calculer la dérivée de chaque fonction.
   - **a.** $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$ sur $]0;+\infty[$
   - **b.** $g(x) = (x^2+4)^{\frac{3}{2}}$ sur $\mathbb{R}$
   - **c.** $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$
5. Calculer les limites suivantes.
   - **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}}$
   - **b.** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{3}} \ln x$
   - **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^{\frac{5}{2}}}$
   - **d.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,(\ln x)^2$ *Indication pour d :* $\sqrt{x}\,(\ln x)^2 = \left(x^{\frac{1}{4}} \ln x\right)^2$.

Exercice 10 : logarithme décimal

d, une solution de BarroTech

1. Calculer sans calculatrice : $\log 1000$, $\log 0{,}01$, $\log \sqrt{10}$ et $\log 50 + \log 2$.
2. Résoudre l'équation $\log x + \log(x-3) = 1$.
3. Combien de chiffres le nombre 3^{50} a-t-il ? On donne $\log 3 \approx 0{,}4771$.
4. Le pH d'une solution est $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H_3O^+}]$, la concentration étant en $\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$.
   - **a.** Calculer le pH, arrondi à $0{,}01$, d'une solution telle que $[\mathrm{H_3O^+}] = 4 \times 10^{-9}$.
   - **b.** Une solution a un pH égal à $3{,}5$. Calculer sa concentration $[\mathrm{H_3O^+}]$.
5. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $0{,}8^n < 10^{-3}$.

S1-S3 Exercices de compléments

Exercice 11 : exponentielle et logarithme de base a

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   - **a.** $2^x = 32$
   - **b.** $5^x = 3$
   - **c.** $4^x - 3 \times 2^x - 4 = 0$
   - **d.** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \leq 9$

2. Calculer $\log_2 64$, $\log_3 \dfrac{1}{27}$ et $\log_4 8$.
3. Calculer la dérivée de chaque fonction.
   - **a.** $f(x) = 3^x$ sur $\mathbb{R}$
   - **b.** $g(x) = \log_2(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$
   - **c.** $h(x) = x^\pi$ sur $]0; +\infty[$
4. Calculer les limites suivantes.
   - **a.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{x^{10}}$
   - **b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$
   - **c.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{0{,}1}}$

Exercice 12 : la fonction $x \mapsto x^x$

Soit $f(x) = x^x$ pour $x > 0$.

1. Écrire $f(x)$ à l'aide de la fonction exponentielle. Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.
3. On prolonge f en posant $f(0) = 1$. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - 1}{x} = -\infty$ et interpréter graphiquement. *Indication : écrire* $\dfrac{f(x) - 1}{x} = \dfrac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \times \ln x$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 1$ sur $]0; +\infty[$.
5. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^x}{e^x}$.

SenAcad, une solution BarroTech