Corrigés détaillés

TERMINALE S · CHAPITRE 3 · LOGARITHME, EXPONENTIELLE ET PUISSANCES

Chaque résultat a été vérifié par calcul formel. Les rappels de méthode sont en italique.

Exercice 1

1. *On décompose chaque nombre en produit de puissances de 2 et de 3.*
   - **a.** $18 = 2 \times 3^2$, donc $\ln 18 = \ln 2 + 2\ln 3$.
   - **b.** $\dfrac{16}{27} = \dfrac{2^4}{3^3}$, donc $\ln \dfrac{16}{27} = 4\ln 2 - 3\ln 3$.
   - **c.** $\ln \sqrt{12} = \dfrac{1}{2}\ln(2^2 \times 3) = \dfrac{1}{2}(2\ln 2 + \ln 3) = \ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln 3$.
   - **d.** $\ln 48 - \ln 6 + \ln \dfrac{1}{4} = \ln \dfrac{48}{6 \times 4} = \ln 2$.
2. *Simplifications.*
   - **a.** Pour $x > 0$: $A = (\ln 3 + \ln x) + (\ln x - \ln 3) - 2\ln x = 0$.
   - **b.** Pour $x > 0$, $x^2 + x = x(x+1)$ avec $x > 0$ et $x + 1 > 0$. Donc $B = \ln x + \ln(x+1) - \ln(x+1) = \ln x$.
3. *$\ln$ est strictement croissante : on peut « prendre le $\ln$ » des deux membres.* $1{,}5^n > 100 \iff n\ln 1{,}5 > \ln 100 \iff n > \dfrac{\ln 100}{\ln 1{,}5}$, car $\ln 1{,}5 > 0$. Or $\dfrac{\ln 100}{\ln 1{,}5} \approx 11{,}36$. **Le plus petit entier est** $n = 12$. Contrôle : $1{,}5^{11} \approx 86{,}5$ et $1{,}5^{12} \approx 129{,}7$.

Studyrad, une solution de Barrolech

Exercice 2

1. Il faut $2x + 1 > 0$ et $x + 3 > 0$, soit $D = \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$. Sur D : $2x + 1 = x + 3 \iff x = 2$, qui appartient à D. $S = \{2\}$.
2. Il faut $x > 0$ et $x - 2 > 0$, soit $D =]2; +\infty[$. Sur D, l'équation s'écrit $\ln\big(x(x-2)\big) = \ln 8$, soit $x^2 - 2x - 8 = 0$, c'est-à-dire $(x-4)(x+2) = 0$. Seul 4 appartient à D. $S = \{4\}$.
3. Il faut $x > 0$ et $x + 2 > 0$, soit $D =]0; +\infty[$. Sur D, $2\ln x = \ln(x^2)$, et l'équation s'écrit $x^2 = x + 2$, soit $(x-2)(x+1) = 0$. Seul 2 appartient à D. $S = \{2\}$.
4. Il faut $3 - x > 0$ et $x + 1 > 0$, soit $D =]-1; 3[$. Sur D : $3 - x \leq x + 1 \iff x \geq 1$. $S = [1; 3[$.
5. Il faut $x^2 - 1 > 0$, soit $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$. Sur D : $x^2 - 1 < 3 \iff x^2 < 4 \iff -2 < x < 2$. On croise avec D : $S =]-2; -1[\cup]1; 2[$.

Exercice 3

1. *Forme $\infty - \infty$: on factorise par le terme qui l'emporte.* $\ln x - 2x = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 2\right)$. La parenthèse tend vers -2, donc **la limite vaut** $-\infty$.

2. Quand $x \to 0^+$, $\ln x \to -\infty$ et $\dfrac{1}{x} \to +\infty$. Le produit $\ln x \times \dfrac{1}{x}$ tend vers $-\infty$. Ce n'est pas une forme indéterminée.
3. *Forme $\infty - \infty$.* $\dfrac{1}{x} + \ln x = \dfrac{1 + x\ln x}{x}$. Le numérateur tend vers 1 (car $x\ln x \to 0$) et le dénominateur vers 0^+. **La limite vaut $+\infty$.**
4. $\ln(2x+1) - \ln x = \ln\dfrac{2x+1}{x} = \ln\left(2 + \dfrac{1}{x}\right)$. L'intérieur tend vers 2 et $\ln$ est continue en 2. **La limite vaut $\ln 2$.**
5. $\dfrac{\ln(1+3x)}{x} = 3 \times \dfrac{\ln(1+3x)}{3x}$. Avec $X = 3x \to 0$, $\dfrac{\ln(1+X)}{X} \to 1$. **La limite vaut 3.**
6. Avec $X = \dfrac{1}{x}$, qui tend vers 0^+ : $x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln(1+X)}{X} \to 1$. **La limite vaut 1.**

Exercice 4

1. *Dérivées.*
   - **a.** $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \geq 2 > 0$ pour tout réel x : f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_1'(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+3}$.
   - **b.** *Dérivée d'un produit.* $f_2'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$.
   - **c.** Sur $\left]-\infty; \tfrac{1}{2}\right[$, $u(x) = 2x - 1$ ne s'annule pas, et $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$: $f_3'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$.
2. *On reconnaît une forme $\frac{u'}{u}$ ou $u'u$.*
   - **a.** $g_1 = \dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 3x + 1 > 0$: une primitive est $G_1(x) = \ln(3x+1)$.
   - **b.** $g_2 = \dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 2 + \sin x \geq 1 > 0$: une primitive est $G_2(x) = \ln(2 + \sin x)$.
   - **c.** $g_3(x) = \dfrac{1}{x} \times \ln x = u'u$ avec $u = \ln x$: une primitive est $G_3(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.
3. *Étude de f.*
   - **a.** En 0^+ : $-2\ln x \to +\infty$ et $x \to 0$, donc $f(x) \to +\infty$. En $+\infty$: $f(x) = x\left(1 - 2\dfrac{\ln x}{x}\right)$, la parenthèse tend vers 1, donc $f(x) \to +\infty$.
   - **b.** $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x-2}{x}$, du signe de $x - 2$ sur $]0; +\infty[$. f est **décroissante sur $]0; 2]$ et croissante sur** $[2; +\infty[$, avec un minimum $f(2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0{,}61$. On reporte $+\infty$ aux deux bornes.
   - **c.** Comme $2 < e$ et que $\ln$ est croissante, $\ln 2 < \ln e = 1$, donc $f(2) = 2(1 - \ln 2) > 0$. Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq f(2) > 0$, c'est-à-dire $2\ln x < x$.
   - **d.** $\dfrac{f(x)}{x} = 1 - 2\dfrac{\ln x}{x} \to 1$, puis $f(x) - x = -2\ln x \to -\infty$. **Branche parabolique de direction la droite** $y = x$ (méthode du chapitre 1).

Exercice 5

SenAcad, une solution de BarroTech

1. *Simplifications.*
   - **a.** $A = e^{2x+(1-x)-(x+1)} = e^0 = 1$.
   - **b.** Avec $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$: $B = 4\,e^x e^{-x} = 4e^0 = 4$.
2. $C = e^{\ln 3} \times e^{2\ln 2} = 3 \times \left(e^{\ln 2}\right)^2 = 3 \times 4 = 12$. $\quad D = 3 - \dfrac{1}{e^{\ln 2}} = 3 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$.
3. *Équations et inéquations.*
   - **a.** $2x - 1 = x + 2 \iff x = 3$. $S = \{3\}$.
   - **b.** $x^2 = 4x - 3 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff (x-1)(x-3) = 0$. $S = \{1;3\}$.
   - **c.** *On pose $X = e^x > 0$.* $X^2 + X - 6 = 0 \iff (X-2)(X+3) = 0$. La racine -3 est rejetée car $X > 0$. $e^x = 2 \iff x = \ln 2$. $S = \{\ln 2\}$.
   - **d.** $1 = e^0$, donc $e^{1-2x} \geq e^0 \iff 1 - 2x \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{2}$. $S = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$.
   - **e.** Avec $X = e^x$: $X^2 - 4X + 3 < 0 \iff (X-1)(X-3) < 0 \iff 1 < X < 3$. Donc $e^0 < e^x < e^{\ln 3}$, soit $0 < x < \ln 3$. $S =]0; \ln 3[$.
   - **f.** Pour tout réel x, $e^x > 0 > -2$. $S = \varnothing$.

Exercice 6

1. $1 - \dfrac{4}{e^x+1} = \dfrac{e^x+1-4}{e^x+1} = \dfrac{e^x-3}{e^x+1} = f(x)$.
2. En $+\infty$: $e^x + 1 \to +\infty$, donc $\dfrac{4}{e^x+1} \to 0$ et $f(x) \to 1$. En $-\infty$: $e^x \to 0$, donc $f(x) \to \dfrac{0-3}{0+1} = -3$. La courbe admet deux asymptotes horizontales : $y = 1$ en $+\infty$ et $y = -3$ en $-\infty$.
3. Avec la question 1 : $f'(x) = -4 \times \left(-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}\right) = \dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2} > 0$. **$f$ est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$, de -3 à 1 (valeurs non atteintes).
4. $f(x) = 0 \iff e^x = 3 \iff x = \ln 3$. Comme f est strictement croissante : $f(x) < 0$ **sur** $]-\infty; \ln 3[$ **et** $f(x) > 0$ **sur** $]\ln 3; +\infty[$.
5. $f(0) = \dfrac{1-3}{1+1} = -1$ et $f'(0) = \dfrac{4}{4} = 1$. Tangente : $y = 1 \times (x-0) - 1$, soit $y = x - 1$.

Exercice 7

1. $e^x - x^2 = x^2\left(\dfrac{e^x}{x^2} - 1\right)$, et $\dfrac{e^x}{x^2} \to +\infty$. **La limite vaut $+\infty$.**
2. $(x^3+2)e^{-x} = x^3e^{-x} + 2e^{-x}$. Les deux termes tendent vers 0. **La limite vaut 0.**
3. $(x^2+x)e^x = x^2e^x + x\,e^x$. En $-\infty$, les deux termes tendent vers 0. **La limite vaut 0.**
4. $\dfrac{e^x}{x^2+1} = \dfrac{e^x}{x^2} \times \dfrac{x^2}{x^2+1}$. Le premier facteur tend vers $+\infty$, le second vers 1. **La limite vaut $+\infty$.**
5. $\dfrac{e^{3x}-1}{x} = 3 \times \dfrac{e^{3x}-1}{3x}$, et avec $X = 3x \to 0$, $\dfrac{e^X - 1}{X} \to 1$. **La limite vaut 3.**
6. Avec $X = \dfrac{1}{x} \to 0^+$: $x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \dfrac{e^X - 1}{X} \to 1$. **La limite vaut 1.**

Exercice 8

Partie A

1. En $-\infty$: $x+1 \to -\infty$ et $e^{-x} \to +\infty$, donc $f(x) \to -\infty$. En $+\infty$: $f(x) = x\,e^{-x} + e^{-x}$, et les deux termes tendent vers 0, donc $f(x) \to 0$. L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
2. $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+1) \times (-e^{-x}) = (1 - x - 1)e^{-x} = -x\,e^{-x}$, du signe de $-x$. **f est croissante sur $]-\infty;0]$, décroissante sur $[0;+\infty[$**, avec un maximum $f(0) = 1$.
3. $\dfrac{f(x)}{x} = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) e^{-x}$. En $-\infty$, la parenthèse tend vers 1 et $e^{-x} \to +\infty$. **Branche parabolique de direction l'axe (Oy).**
4. $f(-1) = 0$ et $f'(-1) = -(-1)e^{1} = e$. Tangente : $y = e(x+1)$.
5. $F'(x) = -e^{-x} - (x+2)(-e^{-x}) = (-1 + x + 2)e^{-x} = (x+1)e^{-x} = f(x)$. **$F$ est bien une primitive de f.**

Partie B

1. $g = u'e^{u}$ avec $u(x) = x^2 - 1$: $G(x) = e^{x^2-1}$.
2. $H(x) = \dfrac{1}{3}\,e^{3x-2}$.
3. $k = \dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^x + 1 > 0$: $K(x) = \ln(e^x + 1)$.
4. $m = u'u^2$ avec $u(x) = e^x + 1$: $M(x) = \dfrac{1}{3}\,(e^x+1)^3$.

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 9

1. $27^{\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 3^2 = 9$. $\quad 16^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{\left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$. $\quad 32^{\frac{2}{5}} = \left(32^{\frac{1}{5}}\right)^2 = 2^2 = 4$.
2. $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{1}{6}}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = x^1 = x$.
3. Pour $x > 0$: $x^{\frac{3}{2}} = 8 \iff \frac{3}{2}\ln x = \ln 8 = 3\ln 2 \iff \ln x = 2\ln 2 = \ln 4 \iff x = 4$. $S = \{4\}$. Contrôle : $4^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$.
4. *Dérivées.*
   - **a.** $f'(x) = \dfrac{5}{3}\,x^{\frac{2}{3}}$.
   - **b.** *Dérivée de u^r : $r\,u'\,u^{r-1}$.* $g'(x) = \dfrac{3}{2} \times 2x \times (x^2+4)^{\frac{1}{2}} = 3x\sqrt{x^2+4}$.
   - **c.** $h(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, donc $h'(x) = -\dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.
5. *Limites.*
   - **a.** Croissance comparée avec $r = \frac{1}{3}$: **la limite vaut** 0.
   - **b.** Croissance comparée en 0^+ avec $r = \frac{1}{3}$: **la limite vaut** 0.
   - **c.** Croissance comparée avec $r = \frac{5}{2}$: **la limite vaut** $+\infty$.
   - **d.** $\sqrt{x}\,(\ln x)^2 = \left(x^{\frac{1}{4}}\ln x\right)^2$. Comme $x^{\frac{1}{4}}\ln x \to 0$ et que la fonction carré est continue en 0, **la limite vaut** 0.

Exercice 10

1. $\log 1000 = \log(10^3) = 3$; $\log 0{,}01 = \log(10^{-2}) = -2$; $\log\sqrt{10} = \frac{1}{2}$; $\log 50 + \log 2 = \log 100 = 2$.
2. Il faut $x > 0$ et $x > 3$, soit $D =]3;+\infty[$. Sur D : $\log\big(x(x-3)\big) = \log 10 \iff x^2 - 3x - 10 = 0 \iff (x-5)(x+2) = 0$. Seul 5 appartient à D. $S = \{5\}$.
3. $\log(3^{50}) = 50\log 3 \approx 23{,}86$. Donc $10^{23} \leq 3^{50} < 10^{24}$: 3^{50} **a 24 chiffres.**
4. *Calculs de pH.*
   - **a.** $\text{pH} = -\log(4\times10^{-9}) = 9 - \log 4 \approx 8{,}40$.
   - **b.** $-\log[\text{H}_3\text{O}^+] = 3{,}5 \iff [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-3{,}5} \approx 3{,}16\times10^{-4}\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.
5. $0{,}8^n < 10^{-3} \iff n\log 0{,}8 < -3 \iff n > \dfrac{-3}{\log 0{,}8}$, car $\log 0{,}8 < 0$ change le sens de l'inégalité. Or $\dfrac{-3}{\log 0{,}8} \approx 30{,}96$. **Le plus petit entier est** $n = 31$. Contrôle : $0{,}8^{30} \approx 1{,}24\times10^{-3}$ et $0{,}8^{31} \approx 0{,}99\times10^{-3}$.

Exercice 11 S1-S3

1. *Équations et inéquation.*
   - **a.** $2^x = 2^5 \iff x\ln 2 = 5\ln 2 \iff x = 5$. $S = \{5\}$.
   - **b.** $5^x = 3 \iff x\ln 5 = \ln 3 \iff x = \dfrac{\ln 3}{\ln 5} \approx 0{,}683$. $S = \left\{\dfrac{\ln 3}{\ln 5}\right\}$.
   - **c.** *On pose* $X = 2^x > 0$, *et* $4^x = (2^2)^x = X^2$. $X^2 - 3X - 4 = 0 \iff (X-4)(X+1) = 0$. On rejette -1. $2^x = 4 \iff x = 2$. $S = \{2\}$.
   - **d.** $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$ et $9 = 3^2$. Comme $x \mapsto 3^x$ est strictement croissante : $-x \leq 2 \iff x \geq -2$. $S = [-2;+\infty[$.
2. $\log_2 64 = \dfrac{6\ln 2}{\ln 2} = 6$; $\log_3 \dfrac{1}{27} = \dfrac{-3\ln 3}{\ln 3} = -3$; $\log_4 8 = \dfrac{3\ln 2}{2\ln 2} = \dfrac{3}{2}$.
3. *Dérivées.*
   - **a.** $f'(x) = (\ln 3)\,3^x$.
   - **b.** $g(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln 2}$, donc $g'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 2}$.
   - **c.** $h'(x) = \pi\, x^{\pi-1}$.
4. *Limites.*
   - **a.** Base $2 > 1$, exposant 10 : l'exponentielle de base 2 l'emporte. **La limite vaut** $+\infty$.
   - **b.** $x^3\left(\frac{1}{2}\right)^x = \dfrac{x^3}{2^x} = \dfrac{1}{2^x/x^3} \to 0$. **La limite vaut** 0.
   - **c.** Croissance comparée avec $\alpha = 0{,}1 > 0$: **la limite vaut** 0.

Exercice 12 S1-S3

1. $f(x) = e^{x\ln x}$. En 0^+ : $x\ln x \to 0$ et $\exp$ est continue en 0, donc $f(x) \to e^0 = 1$. En $+\infty$: $x\ln x \to +\infty$, donc $f(x) \to +\infty$. La limite en 0 est un réel : f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

2. $(x\ln x)' = \ln x + 1$, donc $f'(x) = (\ln x + 1)\,e^{x\ln x} = (\ln x + 1)\,x^x$, du signe de $\ln x + 1$. Or $\ln x + 1 \geq 0 \iff \ln x \geq -1 \iff x \geq e^{-1}$. f **est décroissante sur** $\left]0;\frac{1}{e}\right]$**, croissante sur** $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$, de minimum $f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}} \approx 0{,}692$. Elle part de 1 en 0^+ et tend vers $+\infty$.
3. Pour $0 < x < 1$, $x\ln x \neq 0$ et $\dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x} \times \ln x$. Avec $X = x\ln x \to 0$, le premier facteur tend vers 1 ; le second tend vers $-\infty$. **La limite vaut** $-\infty$**.** La fonction prolongée n'est pas dérivable à droite en 0, et sa courbe admet au point $(0\,;1)$ une **demi-tangente verticale**.
4. $x^x = 1 \iff x\ln x = 0 \iff \ln x = 0$ (car $x > 0$) $\iff x = 1$. $S = \{1\}$**.**
5. $\dfrac{x^x}{e^x} = e^{x\ln x - x} = e^{x(\ln x - 1)}$, et $x(\ln x - 1) \to +\infty$. **La limite vaut** $+\infty$: en $+\infty$, x^x l'emporte même sur e^x.

SenAcad, une solution de BarroTech