Exercices

TERMINALE S · CHAPITRE 2 · DÉRIVATION ET PRIMITIVES

Deux exercices par leçon commune. L'exercice 11 est réservé aux séries S2, S4, S2A et S5. Les exercices 12 et 13 sont réservés aux séries S1, S3 et S1A. Les corrigés détaillés sont dans la fiche « Corrigés ».

Leçon 1 : dérivée d'une fonction composée

Exercice 1 : dériver une composée

Pour chaque fonction, préciser où elle est dérivable, puis calculer sa dérivée.

1. $f_1(x) = (3x - 1)^5$
2. $f_2(x) = (x^2 - x + 2)^3$
3. $f_3(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$
4. $f_4(x) = \cos(3x^2 - 1)$
5. $f_5(x) = \sin^2 x$
6. $f_6(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 1)^2}$

Exercice 2 : variations

SenAcad, une solution de BarroTech

Partie A. Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ sur $\mathbb{R}$ (on a vu au chapitre 1 que $x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4$).

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variation de f (sans les limites).
3. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3.

Partie B. Soit $h(x) = \sin(2x) + 2\sin x$ sur $[0; \pi]$.

1. Montrer que $h'(x) = 2\big(2\cos x - 1\big)\big(\cos x + 1\big)$. *Indication :* $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.
2. En déduire les variations de h sur $[0; \pi]$ et la valeur exacte de son maximum.

Leçon 2 : dérivée de la réciproque, puissances rationnelles

Exercice 3 : dérivée d'une réciproque sans sa formule

Soit $f(x) = x^3 + 3x - 2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note f^{-1} sa réciproque.
2. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $f(1)$, puis $(f^{-1})'(2)$.
4. Calculer $f^{-1}(-2)$, puis $(f^{-1})'(-2)$.
5. Donner une équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse 2.

Exercice 4 : puissances rationnelles et réciproque

1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.
   a. $a(x) = x^{\frac{2}{3}}$ sur $]0;+\infty[$
   b. $b(x) = x^2\sqrt{x}$ sur $]0;+\infty[$, en l'écrivant d'abord sous la forme x^r
   c. $c(x) = (x^2+3)^{\frac{1}{3}}$ sur $\mathbb{R}$
   d. $d(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ sur $]-1;+\infty[$
2. Au chapitre 1 (exercice 10), on a vu que $f(x) = x^2 - 2x$ réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur $[-1;+\infty[$, de réciproque $f^{-1}(x) = 1+\sqrt{x+1}$.
   a. Calculer $(f^{-1})'(x)$ pour $x > -1$ en dérivant cette expression.
   b. Retrouver ce résultat avec la formule $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$.
   c. Pourquoi f^{-1} n'est-elle pas dérivable en -1 ? Interpréter graphiquement.

Leçon 3 : dérivées successives, dérivabilité en un point, accroissements finis

Exercice 5 : dérivées successives

1. Soit $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 7$. Calculer f', f'', f''', $f^{(4)}$ et $f^{(5)}$.
2. Soit $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ sur $]-1;+\infty[$. Calculer g', g'' et g''', puis conjecturer l'expression de $g^{(n)}(x)$.
3. Un mobile se déplace sur un axe. Sa position à l'instant $t \geq 0$ (en secondes) est $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (en mètres).
   a. Calculer sa vitesse $v(t) = x'(t)$ et son accélération $a(t) = x''(t)$.
   b. À quels instants la vitesse est-elle nulle ? À quel instant l'accélération est-elle nulle ?

Exercice 6 : dérivabilité en un point et inégalité des accroissements finis

1. Soit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1;1]$. Sa courbe est un demi-cercle.
   a. Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-1;1[$.
   b. Calculer la limite de $f'(x)$ quand $x \to 1^-$. Que peut-on en conclure en 1 ? Faire de même en -1.
2. Soit $g(x) = (x+1)\sqrt{x+1}$ sur $[-1;+\infty[$. Montrer que g est dérivable en -1 et donner $g'(-1)$.
3. Montrer que, pour tous réels a et b, $|\cos b - \cos a| \leq |b-a|$.
4. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[9;9{,}2]$, montrer que
$$3 + \frac{1}{31} \leq \sqrt{9{,}2} \leq 3 + \frac{1}{30}.$$
   Indication : $3{,}1^2 = 9{,}61$.

Leçon 4 : primitives

Exercice 7 : primitives usuelles

Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 5$ sur $\mathbb{R}$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x^3}$ sur $]0;+\infty[$
3. $f_3(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$
4. $f_4(x) = \sqrt{x}$ sur $]0;+\infty[$
5. $f_5(x) = 2\cos x - \sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$
6. $f_6(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ sur $\mathbb{R}$
7. $f_7(x) = \tan^2 x$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$. *Indication :* $\tan^2 x = (1+\tan^2 x) - 1$.

Exercice 8 : primitive prenant une valeur donnée

1. Déterminer la primitive F de $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 2$.
2. Déterminer la primitive G de $g(x) = \dfrac{1}{x^2} + x$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.
3. Déterminer la primitive H de $h(x) = \sin x + \cos x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $H(\pi) = 0$.
4. Vérifier que $K(x) = x\sin x + \cos x$ est une primitive de $k(x) = x\cos x$ sur $\mathbb{R}$. En déduire la primitive de k qui s'annule en 0.

Leçon 5 : primitives des fonctions composées

Exercice 9 : reconnaître la forme

SenAcad, une solution de BarroTech

Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. $f_1(x) = 2x(x^2-1)^4$ sur $\mathbb{R}$
2. $f_2(x) = (3x^2+1)(x^3+x)^2$ sur $\mathbb{R}$
3. $f_3(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$
4. $f_4(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ sur $\mathbb{R}$
5. $f_5(x) = (2x-1)^5$ sur $\mathbb{R}$
6. $f_6(x) = \sin x \cos^3 x$ sur $\mathbb{R}$
7. $f_7(x) = x^2 \sin(x^3)$ sur $\mathbb{R}$
8. $f_8(x) = \sqrt{3x+1}$ sur $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$

Exercice 10 : transformer avant d'intégrer

1. Vérifier que, pour $x \neq -2$, $\dfrac{x^2+4x+5}{(x+2)^2} = 1 + \dfrac{1}{(x+2)^2}$. En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$ sur $]-2;+\infty[$.
2. En utilisant $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, déterminer une primitive de $x \mapsto \sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $p(x) = \sin x \cos x$.
   a. Trouver une primitive P_1 de p en reconnaissant la forme $u'u$.
   b. Trouver une primitive P_2 de p en utilisant $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$.
   c. Vérifier que $P_1 - P_2$ est une constante. Pourquoi n'y a-t-il pas de contradiction ?
4. Déterminer la primitive F de $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+2)^2}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.

S2-S4 Exercice de la leçon 6

Exercice 11 : points d'inflexion

1. Soit $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 1$.
   a. Calculer $f''(x)$ et étudier son signe.
   b. Montrer que la courbe de f admet un point d'inflexion I, dont on donnera les coordonnées.
   c. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe en I.
   d. Vérifier que $f(x) - (-4x - 2) = (x+1)^3$, puis en déduire la position de la courbe par rapport à T.
2. Déterminer les points d'inflexion de la courbe de $g(x) = x^4 - 6x^2$.
3. Soit $h(x) = x^4 + x$. Montrer que $h''(0) = 0$, mais que la courbe de h n'a pas de point d'inflexion d'abscisse 0. *Indication : comparer la courbe et sa tangente en 0.*
4. Un mobile a pour position $x(t) = 2t^3 - 6t^2 + 1$. Calculer $\dfrac{dx}{dt}$ et $\dfrac{d^2x}{dt^2}$. À quel instant l'accélération s'annule-t-elle ?

SenAcad, une solution de BarroTech

S1-S3 Exercices de compléments

Exercice 12 : accroissements finis et limite de la dérivée

1. Pour chaque fonction, trouver un réel c qui vérifie la conclusion du théorème des accroissements finis sur l'intervalle donné.
   a. $f(x) = x^2 - 4x + 1$ sur $[1; 4]$
   b. $g(x) = \sqrt{x}$ sur $[1; 4]$
2. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, que
$$\frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}}.$$
3. Soit k la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $k(x) = x^2$ si $x \leq 1$ et $k(x) = 2\sqrt{x} - 1$ si $x > 1$.
   a. Montrer que k est continue en 1.
   b. À l'aide du théorème du prolongement de la dérivée, déterminer le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite de k en 1.
   c. k est-elle dérivable en 1 ? Interpréter graphiquement.

Exercice 13 : dérivées n-ièmes

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
2. Soit $f(x) = \sin(3x)$. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $f^{(n)}(x) = 3^n \sin\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)$. En déduire $f^{(4)}(x)$.
3. Exprimer $\sin^{(2027)}(x)$ à l'aide de $\cos x$ ou de $\sin x$.
4. Soit $g(x) = x \sin x$. Calculer g', g'' et g'''.

SenAcad, une solution de BayTech