Corrigés détaillés

TERMINALE S · CHAPITRE 2 · DÉRIVATION ET PRIMITIVES

Chaque résultat a été vérifié par calcul formel. Les rappels de méthode sont en italique.

Exercice 1

On repère l'intérieur u, on calcule u', puis on applique la formule de la leçon 1.

1. f_1 est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. Avec $u = 3x - 1$ et $u' = 3$: $f_1'(x) = 5 \times 3 \times (3x-1)^4 = 15(3x-1)^4$.
2. Dérivable sur $\mathbb{R}$. Avec $u = x^2 - x + 2$ et $u' = 2x - 1$: $f_2'(x) = 3(2x-1)(x^2 - x + 2)^2$.
3. $2x^2 + 1 \geq 1 > 0$ pour tout réel x, donc f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$. Avec $u' = 4x$: $f_3'(x) = \dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$.
4. Dérivable sur $\mathbb{R}$. Avec $u = 3x^2 - 1$ et $u' = 6x$: $f_4'(x) = -6x\sin(3x^2 - 1)$.
5. $f_5 = u^2$ avec $u = \sin x$: $f_5'(x) = 2\cos x \sin x$, sur $\mathbb{R}$. *On peut aussi écrire $f_5'(x) = \sin(2x)$.*
6. $(x^2+1)^2$ ne s'annule pas, donc f_6 est dérivable sur $\mathbb{R}$. Avec $v = (x^2+1)^2$, $v' = 2 \times 2x \times (x^2+1) = 4x(x^2+1)$ et $f_6'(x) = -\dfrac{v'}{v^2} = -\dfrac{4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = -\dfrac{4x}{(x^2+1)^3}$.

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 2

Partie A

1. $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 \geq 4 > 0$: la racine carrée est dérivable là où l'intérieur est strictement positif, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+5}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.
2. Le dénominateur est positif, donc $f'(x)$ a le signe de $x - 1$. f est **décroissante sur** $]-\infty; 1]$ et **croissante sur** $[1; +\infty[$, avec un minimum $f(1) = \sqrt{4} = 2$.
3. $f(3) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $f'(3) = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. La tangente a pour équation $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-3) + 2\sqrt{2}$, soit $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Partie B

1. $h'(x) = 2\cos(2x) + 2\cos x = 2\big(2\cos^2 x - 1 + \cos x\big)$. Or $(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 2\cos^2 x + 2\cos x - \cos x - 1 = 2\cos^2 x + \cos x - 1$. Donc $h'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.
2. Sur $[0; \pi]$, $\cos x + 1 \geq 0$, et ne s'annule qu'en π. Le signe de h' est donc celui de $2\cos x - 1$: positif quand $\cos x > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right[$, négatif sur $\left]\frac{\pi}{3}; \pi\right[$. h est **croissante sur** $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ et **décroissante sur** $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$, avec $h(0) = h(\pi) = 0$. Son maximum vaut $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 3

1. f est un polynôme, continue sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$, donc f est strictement croissante. $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. D'après le théorème de la bijection (chapitre 1), f **réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$**.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' ne s'annule jamais, donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. $f(1) = 1 + 3 - 2 = 2$, donc $f^{-1}(2) = 1$ et $(f^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{6}$.
4. $f(0) = -2$, donc $f^{-1}(-2) = 0$ et $(f^{-1})'(-2) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{3}$.
5. Le point de la courbe de f^{-1} d'abscisse 2 est $(2;1)$, et la pente de la tangente est $\frac{1}{6}$: $y = \dfrac{1}{6}(x-2) + 1$, soit $y = \dfrac{x}{6} + \dfrac{2}{3}$.

Exercice 4

1. a. $a'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

   b. $b(x) = x^2 \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$, donc $b'(x) = \dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$.

   c. $x^2 + 3 > 0$ et $u' = 2x$: $c'(x) = \dfrac{1}{3} \times 2x \times (x^2+3)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{2x}{3(x^2+3)^{\frac{2}{3}}}$.

   d. Sur $]-1;+\infty[$, $x^3 + 1 > 0$ et $d(x) = (x^3+1)^{-\frac{1}{2}}$. Avec $u' = 3x^2$: $d'(x) = -\dfrac{1}{2} \times 3x^2 \times (x^3+1)^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{3x^2}{2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}$.
2. a. Pour $x > -1$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

   b. $f'(t) = 2t - 2$, donc $f'\big(f^{-1}(x)\big) = 2\big(1 + \sqrt{x+1}\big) - 2 = 2\sqrt{x+1}$, et l'on retrouve $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

   c. $f^{-1}(-1) = 1$ et $f'(1) = 0$: la courbe de f a une tangente horizontale en son sommet $(1;-1)$. Par symétrie par rapport à $y = x$, la courbe de f^{-1} a une **tangente verticale** au point $(-1;1)$, et f^{-1} n'est pas dérivable en -1. *On le voit aussi avec la limite : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \to +\infty$ quand $x \to -1^+$.*

Exercice 5

1. $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$, $f''(x) = 12x^2 - 12x$, $f'''(x) = 24x - 12$, $f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(5)}(x) = 0$.
2. $g'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $g''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$, $g'''(x) = -\dfrac{6}{(x+1)^4}$. À chaque étape, le signe change, l'exposant du dénominateur augmente de 1 et le numérateur est multiplié par le nouvel exposant : 1, 1×2, $1 \times 2 \times 3$. On conjecture $g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n\, n!}{(x+1)^{n+1}}$, où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. *Cette conjecture se démontre par récurrence.*

3. a. $v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3)$ et $a(t) = 6t - 12$.

   b. La vitesse est nulle aux instants $t = 1$ **s et** $t = 3$ **s** (le mobile fait demi-tour). L'accélération est nulle à $t = 2$ **s**.

Exercice 6

1. a. Sur $]-1;1[$, $1 - x^2 > 0$ et $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

   b. Quand $x \to 1^-$, le numérateur $-x$ tend vers -1 et le dénominateur vers 0^+ : $f'(x) \to -\infty$. Comme f est continue en 1, f **n'est pas dérivable en** 1 et la courbe a une **demi-tangente verticale** au point $(1;0)$. En -1 : quand $x \to -1^+$, $-x \to 1$ et le dénominateur tend vers 0^+, donc $f'(x) \to +\infty$. Même conclusion au point $(-1;0)$. *C'est cohérent avec le demi-cercle, dont les tangentes aux extrémités sont verticales.*

2. g est continue en -1 avec $g(-1) = 0$. Pour $x > -1$, $g(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}}$ et $g'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x+1} \to 0$ quand $x \to -1^+$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, g **est dérivable en** -1 **et** $g'(-1) = 0$ (demi-tangente horizontale).

3. $|\cos'(x)| = |-\sin x| \leq 1$ pour tout réel x. La forme 2 de l'inégalité des accroissements finis, sur $\mathbb{R}$ avec $M = 1$, donne $|\cos b - \cos a| \leq |b - a|$.

4. Pour $x \in [9;9{,}2]$, on a $9 \leq x \leq 9{,}61$, donc $3 \leq \sqrt{x} \leq 3{,}1$ et $\dfrac{1}{6{,}2} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{6}$. La forme 1, avec $b - a = 0{,}2$, donne $\dfrac{0{,}2}{6{,}2} \leq \sqrt{9{,}2} - 3 \leq \dfrac{0{,}2}{6}$, c'est-à-dire $3 + \dfrac{1}{31} \leq \sqrt{9{,}2} \leq 3 + \dfrac{1}{30}$. *En valeurs approchées :* $3{,}0322 \leq \sqrt{9{,}2} \leq 3{,}0334$. *La calculatrice donne* $\sqrt{9{,}2} \approx 3{,}0332$.

Exercice 7

On lit le tableau des dérivées à l'envers, terme par terme. Chaque réponse est définie à une constante près.

1. $F_1(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x$.
2. $\dfrac{1}{x^3}$: ligne $\frac{1}{x^n}$ avec $n = 3$, $F_2(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$.
3. $F_3(x) = 3 \times 2\sqrt{x} - 2 \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 6\sqrt{x} + \dfrac{2}{x}$.
4. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, donc $F_4(x) = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$.
5. $F_5(x) = 2\sin x + \dfrac{1}{3}\cos(3x)$.
6. $F_6(x) = \dfrac{1}{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.
7. $\tan^2 x = (1 + \tan^2 x) - 1$, donc $F_7(x) = \tan x - x$.

Exercice 8

1. $F(x) = x^3 + x^2 - x + c$ et $F(1) = 1 + c = 2$, donc $c = 1$: $F(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.

2. $G(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{2} + c$ et $G(1) = -1 + \frac{1}{2} + c = 0$, donc $c = \frac{1}{2}$: $G(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}$.
3. $H(x) = -\cos x + \sin x + c$ et $H(\pi) = 1 + 0 + c = 0$, donc $c = -1$: $H(x) = \sin x - \cos x - 1$.
4. $K'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x = k(x)$: K est bien une primitive de k. Les primitives sont $K + c$, et $K(0) = 0 + 1 = 1$, donc la primitive nulle en 0 est $x \mapsto x\sin x + \cos x - 1$.

Exercice 9

On repère u, on fait apparaître u', puis on vérifie en dérivant.

1. $u = x^2 - 1$, $u' = 2x$: $f_1 = u'u^4$, donc $F_1(x) = \dfrac{(x^2-1)^5}{5}$.
2. $u = x^3 + x$, $u' = 3x^2 + 1$: $f_2 = u'u^2$, donc $F_2(x) = \dfrac{(x^3+x)^3}{3}$.
3. $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$: $f_3 = \frac{1}{2}\dfrac{u'}{u^2}$, donc $F_3(x) = -\dfrac{1}{2(x^2+1)}$.
4. $u = x^2 + 9 > 0$: $f_4 = \frac{1}{2}\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, donc $F_4(x) = \sqrt{x^2+9}$.
5. $u = 2x - 1$, $u' = 2$: $f_5 = \frac{1}{2}u'u^5$, donc $F_5(x) = \dfrac{(2x-1)^6}{12}$.
6. $u = \cos x$, $u' = -\sin x$: $f_6 = -u'u^3$, donc $F_6(x) = -\dfrac{\cos^4 x}{4}$.
7. $u = x^3$, $u' = 3x^2$: $f_7 = \frac{1}{3}u'\sin u$, donc $F_7(x) = -\dfrac{1}{3}\cos(x^3)$.
8. $u = 3x + 1 > 0$ sur l'intervalle, $u' = 3$: $f_8 = \frac{1}{3}u'u^{\frac{1}{2}}$, donc $F_8(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{(3x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{9}(3x+1)\sqrt{3x+1}$.

Exercice 10

1. $(x+2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 4 + 1 = x^2 + 4x + 5$: l'égalité est vraie. Une primitive de $\frac{1}{(x+2)^2}$ est $-\frac{1}{x+2}$ (forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u = x + 2$). Une primitive cherchée est $x - \dfrac{1}{x+2}$.
2. $\sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$, dont une primitive est $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin(2x)}{4}$.
3. a. Avec $u = \sin x$, $u' = \cos x$: $p = u'u$, donc $P_1(x) = \dfrac{\sin^2 x}{2}$.

   b. $p(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$, donc $P_2(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) = -\dfrac{\cos(2x)}{4}$.

   c. $P_1(x) - P_2(x) = \dfrac{\sin^2 x}{2} + \dfrac{1 - 2\sin^2 x}{4} = \dfrac{1}{4}$. La différence est constante : deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante. Les deux réponses sont justes.
4. $u = x^2 + 2x + 2$ ne s'annule pas (discriminant -4) et $u' = 2x + 2 = 2(x+1)$. Donc $f = \frac{1}{2}\dfrac{u'}{u^2}$ et $F(x) = -\dfrac{1}{2(x^2+2x+2)} + c$. Avec $F(0) = -\frac{1}{4} + c = 0$, on obtient $c = \frac{1}{4}$: $F(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(x^2+2x+2)}$.

Exercice 11 S2-S4

1. a. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 1$ et $f''(x) = 6x + 6 = 6(x+1)$: négatif pour $x < -1$, positif pour $x > -1$.

   b. f'' s'annule en -1 en changeant de signe : la courbe admet un point d'inflexion $I(-1;2)$, car $f(-1) = -1 + 3 + 1 - 1 = 2$.

   c. $f'(-1) = 3 - 6 - 1 = -4$, donc T : $y = -4(x+1) + 2$, soit $y = -4x - 2$.

   d. $f(x) - (-4x - 2) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$. Pour $x < -1$, c'est négatif : la courbe est **sous** T. Pour $x > -1$, elle est **au-dessus**. Elle traverse bien sa tangente en I.

2. $g''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1)$, qui s'annule en changeant de signe en -1 et en 1. Avec $g(\pm 1) = 1 - 6 = -5$, les points d'inflexion sont $(-1;-5)$ **et** $(1;-5)$.

3. $h''(x) = 12x^2$, donc $h''(0) = 0$, mais h'' ne change pas de signe. La tangente en 0 est $y = x$ (car $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$), et $h(x) - x = x^4 \geq 0$: la courbe reste **au-dessus** de sa tangente, elle ne la traverse pas. **Pas de point d'inflexion en** 0**.**

4. $\dfrac{dx}{dt} = 6t^2 - 12t$ et $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 12t - 12$. L'accélération s'annule à $t = 1$.

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 12 S1-S3

1. a. $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{1-(-2)}{3}=1$. On résout $f'(c)=2c-4=1$: $c=\dfrac{5}{2}$, qui est bien dans $]1;4[$.
   b. $\dfrac{g(4)-g(1)}{3}=\dfrac{1}{3}$. On résout $\dfrac{1}{2\sqrt{c}}=\dfrac{1}{3}$: $\sqrt{c}=\frac{3}{2}$, $c=\dfrac{9}{4}$, dans $]1;4[$.
2. $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Le théorème des accroissements finis donne $c\in]a;b[$ tel que $\sqrt{b}-\sqrt{a}=\dfrac{b-a}{2\sqrt{c}}$. Comme $0<a<c<b$, on a $\sqrt{a}<\sqrt{c}<\sqrt{b}$, donc $\dfrac{1}{2\sqrt{b}}<\dfrac{1}{2\sqrt{c}}<\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$. En multipliant par $b-a>0$: $\dfrac{b-a}{2\sqrt{b}}<\sqrt{b}-\sqrt{a}<\dfrac{b-a}{2\sqrt{a}}$. *Les inégalités sont strictes, ce que l'inégalité des accroissements finis seule ne donnerait pas.*
3. a. $k(1)=1$, la limite à gauche vaut 1, et $\lim\limits_{x\to1^+}(2\sqrt{x}-1)=1$. Donc k est continue en 1.

   b. **À gauche** : k est continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1[$ avec $k'(x)=2x\to2$ quand $x\to1^-$. Le nombre dérivé à gauche vaut 2. **À droite** : k est continue sur $[1;2]$, dérivable sur $]1;2[$ avec $k'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\to1$ quand $x\to1^+$. Le nombre dérivé à droite vaut 1.

   c. Les deux nombres dérivés sont différents : k **n'est pas dérivable en** 1. La courbe a deux demi-tangentes de pentes 2 et 1 au point $(1;1)$: c'est un **point anguleux**.

Exercice 13 S1-S3

SenAcad, une solution de BarroTech

1. Pour $n=0$: $\cos^{(0)}(x)=\cos x=\cos(x+0)$. Si $\cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$, alors $\cos^{(n+1)}(x)=-\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$, car $-\sin t=\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$. La propriété est vraie pour tout $n\geq0$.
2. Pour $n=0$, c'est $f(x)=\sin(3x)$. Si $f^{(n)}(x)=3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)$, alors, avec la dérivée de $\sin u$: $f^{(n+1)}(x)=3^n\times3\cos\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)=3^{n+1}\sin\left(3x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$. En particulier, $f^{(4)}(x)=81\sin(3x+2\pi)=81\sin(3x)$.
3. $\sin^{(2027)}(x)=\sin\left(x+\frac{2027\pi}{2}\right)$ et $\frac{2027\pi}{2}=506\times2\pi+\frac{3\pi}{2}$. Par périodicité, $\sin^{(2027)}(x)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos x$. *On le lit aussi sur le cycle* $\sin,\cos,-\sin,-\cos$ *: la troisième dérivée est* $-\cos$.
4. $g'(x)=\sin x+x\cos x$, $g''(x)=2\cos x-x\sin x$, $g'''(x)=-3\sin x-x\cos x$.