Exercices

TERMINALE S · CHAPITRE 1 · LIMITES ET CONTINUITÉ

Deux exercices par leçon. Les exercices 11 et 12 sont réservés aux séries S1, S3 et S1A. Corrigés détaillés : `04_corriges.md`.

Leçon 1 : limites et comparaison

Exercice 1 : lever une indétermination

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-x+2}{1-x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

Exercice 2 : théorèmes de comparaison

1. Montrer que, pour tout $x>0$, $\dfrac{1}{x}\le\dfrac{2+\sin x}{x}\le\dfrac{3}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\sin x}{x}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\cos x\right)$.
3. Montrer que, pour tout $x<0$, $x(2+\cos x)\le x$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} x(2+\cos x)$.

Leçon 2 : branches infinies et asymptotes

Exercice 3 : asymptote oblique

Soit $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-1}{x-2}$.

1. Donner l'ensemble de définition D_f.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x\in D_f$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.
3. Calculer les limites de f à gauche et à droite en 2. Interpréter graphiquement.
4. Montrer que la droite $\Delta : y=2x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.

Exercice 4 : nature des branches infinies

Déterminer la nature de la branche infinie de chaque courbe en $+\infty$.

1. $f(x)=x^2-x$
2. $g(x)=2x-\sqrt{x}$

3. $h(x) = \sqrt{4x^2 + x}$, définie sur $]-\infty; -\frac{1}{4}] \cup [0; +\infty[$. Étudier aussi la branche infinie en $-\infty$.

Leçon 3 : continuité

Exercice 5 : prolongement par continuité

Dire si chaque fonction est prolongeable par continuité au point indiqué. Si oui, préciser la valeur à donner.

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$, en 1.
2. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$, en 0.
3. $k(x) = \dfrac{|x|}{x}$, en 0.

Exercice 6 : continuité et limite d'une composée

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{9x^2 + 1}{x^2 + 2}}$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x}{x+1}\right)$.
3. Démontrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. *Indication : écrire $x^2 - 2x + 5$ sous forme canonique.*

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 4 : image d'un intervalle et théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 7 : image d'un intervalle

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'image par f de chacun des intervalles $[0; 3]$, $]2; 5]$ et $[3; +\infty[$.

Exercice 8 : nombre de solutions et encadrement

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$, et préciser un intervalle contenant chacune d'elles.
3. Soit β la solution comprise entre -1 et 1. Montrer que $0 < \beta < 1$, puis donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

Leçon 5 : fonction réciproque

Exercice 9 : réciproque d'une fonction homographique

Soit $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$ sur $I =]-2; +\infty[$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur I.
2. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
3. Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Exercice 10 : réciproque et courbe

Soit $f(x) = x^2 - 2x$ sur $I = [1; +\infty[$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
2. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$. *Indication : écrire $f(x) = (x-1)^2 - 1$.*
3. Dans un repère orthonormé, tracer $\mathcal{C}_f$, la droite $y = x$, puis $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

S1-S3 Exercices de compléments

Exercice 11 : composées et raccordement

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$.
2. En utilisant $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.
3. Soit a un réel et f définie par $f(x) = 2x^2 - x + a$ si $x \leq 1$, et $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$ si $x > 1$. Déterminer a pour que f soit continue en 1.

Exercice 12 : équation fonctionnelle et fonction monotone bornée

Partie A. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $\big(f(x)\big)^2 = 1 + x^2$, et telle que $f(0) = -1$.

1. Montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer $f(x)$ pour tout réel x.

Partie B. Soit $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x, $g(x) < 1$.
2. Sans calcul, que peut-on dire de la limite de g en $+\infty$? Calculer ensuite cette limite.