Corrigés détaillés

TERMINALE S · CHAPITRE 1 · LIMITES ET CONTINUITÉ

Chaque résultat a été vérifié par calcul formel. Les rappels de méthode sont en italique.

Exercice 1

1. *Rationnelle en $-\infty$: quotient des termes de plus haut degré.* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-x+2}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2}{-x^2} = -3$.
2. *Forme $\frac{0}{0}$ en 3 : on factorise par $(x-3)$.* Le trinôme x^2-2x-3 s'annule en 3 et en -1, donc $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$. Pour $x\neq 3$, $\dfrac{x^2-2x-3}{x-3} = x+1$, d'où $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} = 4$.
3. *Forme $\infty-\infty$: expression conjuguée.* $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \dfrac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc la limite vaut 0.
4. *Forme $\frac{0}{0}$ avec une racine : expression conjuguée.* Pour $x\neq 1$: $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \dfrac{(x+3)-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}$. Quand $x\to 1$, cela tend vers $\dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 2

SenAcad, une solution de BarroTech

1. Pour tout x, $-1\leq \sin x\leq 1$, donc $1\leq 2+\sin x\leq 3$. En divisant par $x>0$, l'ordre est conservé : $\dfrac{1}{x}\leq \dfrac{2+\sin x}{x}\leq \dfrac{3}{x}$. Les deux encadrants tendent vers 0 en $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\sin x}{x} = 0$.
2. $\cos x\leq 1$, donc $-\cos x\geq -1$ et $x^2-\cos x\geq x^2-1$. Comme $x^2-1\to+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-\cos x)=+\infty$ (théorème de minoration).
3. $\cos x\geq -1$ donne $2+\cos x\geq 1$. On multiplie par $x<0$, ce qui change le sens : $x(2+\cos x)\leq x$. Comme $x\to-\infty$, le théorème de majoration donne $\lim\limits_{x\to-\infty} x(2+\cos x) = -\infty$.

Exercice 3

1. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.
2. On cherche $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2} = \dfrac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2} = \dfrac{ax^2+(b-2a)x+(c-2b)}{x-2}$. Par identification avec $2x^2-3x-1$: $a=2$, puis $b-4=-3$ donc $b=1$, puis $c-2=-1$ donc $c=1$. Ainsi $f(x) = 2x+1+\dfrac{1}{x-2}$.
3. En 2, le numérateur vaut $8-6-1=1>0$. Le dénominateur $x-2$ tend vers 0^+ à droite et vers 0^- à gauche. Donc $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$. La droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

4. $f(x) - (2x+1) = \dfrac{1}{x-2}$, qui tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. Donc $\Delta : y = 2x+1$ est asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Le signe de $\dfrac{1}{x-2}$ est celui de $x-2$. Pour $x > 2$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ. Pour $x < 2$, elle est au-dessous.

Exercice 4

1. $\dfrac{f(x)}{x} = x - 1 \to +\infty$: **branche parabolique de direction** (Oy).
2. $\dfrac{g(x)}{x} = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} \to 2$, puis $g(x) - 2x = -\sqrt{x} \to -\infty$: **branche parabolique de direction la droite** $y = 2x$.
3. **En** $+\infty$ (on a $x > 0$) : $\sqrt{4x^2+x} = x\sqrt{4+\frac{1}{x}}$, donc $\dfrac{h(x)}{x} = \sqrt{4+\frac{1}{x}} \to 2$. Ensuite : $h(x) - 2x = \dfrac{(4x^2+x) - 4x^2}{\sqrt{4x^2+x} + 2x} = \dfrac{x}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}} + 2\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}} + 2} \to \dfrac{1}{4}$. **La droite** $y = 2x + \frac{1}{4}$ **est asymptote oblique en** $+\infty$**.**

   En $-\infty$ (on a $x < 0$, donc $\sqrt{x^2} = -x$) : $\sqrt{4x^2+x} = -x\sqrt{4+\frac{1}{x}}$, donc $\dfrac{h(x)}{x} = -\sqrt{4+\frac{1}{x}} \to -2$. Ensuite :

$h(x) + 2x = \dfrac{x}{\sqrt{4x^2+x} - 2x} = \dfrac{x}{-x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}} + 2\right)} = \dfrac{-1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}} + 2} \to -\dfrac{1}{4}$. **La droite** $y = -2x - \frac{1}{4}$ **est asymptote oblique en** $-\infty$**.**

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 5

1. $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, donc pour $x \neq 1$, $f(x) = x + 2 \to 3$. **Prolongeable par continuité en** 1**, en posant** $f(1) = 3$**.**
2. Pour $x \neq 0$: $g(x) = \dfrac{(x+4) - 4}{x\left(\sqrt{x+4} + 2\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+4} + 2} \to \dfrac{1}{4}$. **Prolongeable par continuité en** 0**, en posant** $g(0) = \frac{1}{4}$**.**
3. Pour $x > 0$, $k(x) = \frac{x}{x} = 1$. Pour $x < 0$, $k(x) = \frac{-x}{x} = -1$. La limite à droite (1) et la limite à gauche (-1) sont différentes : k n'a pas de limite en 0. k **n'est pas prolongeable par continuité en** 0**.**

Exercice 6

1. L'intérieur $\dfrac{9x^2+1}{x^2+2}$ tend vers $\dfrac{9x^2}{x^2} = 9$ en $+\infty$. La racine carrée est continue en 9. La limite vaut $\sqrt{9} = 3$.
2. L'intérieur $\dfrac{\pi x}{x+1}$ tend vers $\dfrac{\pi x}{x} = \pi$. Le cosinus est continu en π. La limite vaut $\cos \pi = -1$.
3. $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 \geq 4 > 0$ pour tout réel x. La fonction est donc définie sur $\mathbb{R}$. C'est la composée de $u : x \mapsto x^2 - 2x + 5$, polynôme continu sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[4; +\infty[$, suivie de la racine carrée, continue sur $[0; +\infty[$. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

1. $f'(x) = 2x - 4$, qui s'annule en 2. f est décroissante sur $]-\infty; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$, avec un minimum $f(2) = -1$.
2. Les valeurs utiles sont $f(0) = 3$, $f(2) = -1$, $f(3) = 0$ et $f(5) = 8$.
   - $[0; 3]$: f n'est pas monotone sur cet intervalle. Elle descend de 3 à -1, puis remonte jusqu'à 0. Son image est $[-1; 3]$.
   - $]2; 5]$: f est continue et strictement croissante. La borne 2 est exclue, donc la valeur -1 n'est pas atteinte. Son image est $]-1; 8]$.
   - $[3; +\infty[$: f est strictement croissante, $f(3) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Son image est $[0; +\infty[$.

Exercice 8

1. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. f est croissante sur $]-\infty; -1]$, décroissante sur $[-1; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$, avec $f(-1) = 3$ et $f(1) = -1$. Les limites sont $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
2. On applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur chaque intervalle de monotonie. f y est continue, puisque c'est un polynôme, et strictement monotone.
   - Sur $]-\infty; -1]$, f prend toutes les valeurs de $]-\infty; 3]$, qui contient 0 : **une unique solution**, dans $]-\infty; -1[$.
   - Sur $[-1; 1]$, f prend toutes les valeurs de $[-1; 3]$, qui contient 0 : **une unique solution** β, dans $]-1; 1[$.
   - Sur $[1; +\infty[$, f prend toutes les valeurs de $[-1; +\infty[$, qui contient 0 : **une unique solution**, dans $]1; +\infty[$.

   Ces intervalles ne se chevauchent pas, sauf en -1 et 1, qui ne sont pas solutions. L'équation a donc **exactement trois solutions**.
3. $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = -1 < 0$. Comme f est strictement décroissante sur $[-1; 1]$, on a $0 < \beta < 1$. Par balayage, $f(0{,}3) = 0{,}127 > 0$ et $f(0{,}4) = -0{,}136 < 0$, donc $0{,}3 < \beta < 0{,}4$. *Pour information, $\beta \approx 0{,}347$.*

Exercice 9

1. $f'(x) = \dfrac{3(x+2) - (3x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{7}{(x+2)^2} > 0$ sur I. f est donc strictement croissante sur I.
2. f est continue sur I, puisqu'elle est rationnelle, et strictement croissante. En -2^+, le numérateur tend vers -7 et le dénominateur vers 0^+, donc $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$. En $+\infty$, $f(x)$ tend vers 3. Donc f **réalise une bijection de I sur $J =]-\infty; 3[$**.
3. Pour $x \in I$ et $y \in J$: $y = \dfrac{3x-1}{x+2} \iff yx + 2y = 3x - 1 \iff x(y-3) = -1 - 2y \iff x = \dfrac{2y+1}{3-y}$ (avec $3 - y \neq 0$ puisque $y < 3$). Donc $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{3-x}$ **pour tout** $x \in]-\infty; 3[$.

SenAcad, une solution de BaroTech

Exercice 10

1. $f(x) = (x-1)^2 - 1$, ce qui donne $f'(x) = 2(x-1) > 0$ pour $x > 1$. f est continue et strictement croissante sur $I = [1; +\infty[$. On a $f(1) = -1$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. f **réalise une bijection de** I **sur** $J = [-1; +\infty[$.
2. Pour $x \geq 1$ et $y \geq -1$: $y = (x-1)^2 - 1 \iff (x-1)^2 = y+1 \iff x - 1 = \sqrt{y+1}$, car $x - 1 \geq 0$. Donc $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$ **pour** $x \geq -1$.
3. $\mathcal{C}_f$ est la demi-parabole de sommet $(1\,;\,-1)$. $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est sa symétrique par rapport à $y = x$: elle part du point $(-1\,;\,1)$, avec une tangente verticale, symétrique de la tangente horizontale de $\mathcal{C}_f$ en son sommet. Point de contrôle : $f(3) = 3$, donc le point $(3\,;\,3)$ appartient aux deux courbes, sur la droite $y = x$.

Exercice 11 S1-S3

1. $\dfrac{\sin(3x)}{x} = 3 \times \dfrac{\sin(3x)}{3x}$. Quand $x \to 0$, $3x \to 0$, et $\dfrac{\sin y}{y} \to 1$ quand $y \to 0$. Par composée, $\dfrac{\sin(3x)}{3x} \to 1$, donc **la limite vaut** 3.
2. $\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2$. Par composée, $\dfrac{\sin(x/2)}{x/2} \to 1$, donc **la limite vaut** $\frac{1}{2}$.
3. $f(1) = 2 - 1 + a = 1 + a$, et c'est aussi la limite à gauche. À droite, $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2+3}{x+1} = \dfrac{4}{2} = 2$. f est continue en 1 si et seulement si $1 + a = 2$, c'est-à-dire $a = 1$.

Besoin d'une solution de BarroTech

Exercice 12 S1-S3

Partie A

1. Pour tout x, $\big(f(x)\big)^2 = 1 + x^2 \geq 1 > 0$, donc $f(x) \neq 0$.
2. Si f prenait une valeur positive en x_1 et une valeur négative en x_2, alors, f étant continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires donnerait un c entre x_1 et x_2 tel que $f(c) = 0$. C'est impossible d'après la question 1. Donc f garde un signe constant.
3. $f(0) = -1 < 0$, donc $f(x) < 0$ pour tout x. Comme $\big(f(x)\big)^2 = 1 + x^2$, on obtient $f(x) = -\sqrt{1+x^2}$ **pour tout réel** x.

Partie B

1. $g'(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \dfrac{(1+x^2) - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}} > 0$. g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   De plus, $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$, donc $g(x) < 1$.
2. g est croissante et majorée par 1 sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème sur les fonctions monotones bornées, g **a une limite finie** $\ell \leq 1$ **en** $+\infty$.

   Calcul : pour $x > 0$, $g(x) = \dfrac{x}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} \to 1$. Donc $\ell = 1$.