Exercices

PREMIÈRE S · CHAPITRE 5 · SUITES NUMÉRIQUES

Exercices classés par leçon, du plus simple au plus complet. Les exercices 1 à 12 sont communs à toutes les séries S. L'exercice 13 est réservé aux séries S2, S4, S2A et S5. L'exercice 14 est réservé aux séries S1, S3 et S1A. Calculatrice autorisée pour les valeurs approchées. Les situations concrètes sont des modèles simplifiés, aux données inventées. Les corrigés détaillés sont dans la fiche « Corrigés ».

Leçon 1 : qu'est-ce qu'une suite ?

Exercice 1 : calculer des termes

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 5n + 1$.
   a. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{10}.
   b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n, puis $u_n + 1$. Ces deux expressions sont-elles égales ?
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.
3. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = \sqrt{n - 4}$. À partir de quel rang est-elle définie ? Quel est son premier terme ? Calculer w_5, w_8 et w_{13}.
4. On note (s_n) la suite somme et (p_n) la suite produit des suites (u_n) et (v_n) : $s_n = u_n + v_n$ et $p_n = u_n v_n$. Calculer s_0, s_2 et p_1.

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 2 : représenter, modéliser

1. Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.
   a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
   b. Placer ces termes et u_0 sur une droite graduée (unité : 2 cm). Que constate-t-on ?
2. Soit $v_n = n^2 - 4n + 3$. Calculer v_0, v_1, …, v_5, puis placer les points $M_n\big(n\,;v_n\big)$ dans un repère. Sur quelle courbe ces points se trouvent-ils ? Doit-on les relier ?
3. **Des carrés d'allumettes.** Avec des allumettes, on forme une rangée de carrés accolés : il faut 4 allumettes pour 1 carré, 7 pour 2 carrés, 10 pour 3 carrés. On note m_n le nombre d'allumettes nécessaires pour n carrés ($n \geq 1$).
   a. Combien faut-il d'allumettes pour 4 carrés ?
   b. Exprimer m_{n+1} en fonction de m_n.
   c. Vérifier que $m_n = 3n + 1$ pour $n = 1$, 2, 3 et 4. *(On admet cette formule pour tout $n \geq 1$.)*
   d. Combien de carrés peut-on former avec exactement 100 allumettes ?

Leçon 2 : sens de variation

Exercice 3 : trois méthodes

Étudier le sens de variation de chaque suite, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. $u_n = n^2 - 6n + 1$ (méthode 1 ; on calculera aussi u_0, …, u_4).
2. $v_n = \dfrac{n}{n+1}$ (méthode 1).
3. $w_n = \dfrac{3^n}{n+2}$ (méthode 2).
4. $z_n = \dfrac{5-n}{n+2}$ (méthode 3, à l'aide de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{5-x}{x+2}$).
5. $t_n = (-1)^n \times n$: calculer t_0, t_1, t_2, t_3. La suite est-elle monotone ?

Exercice 4 : suites définies par récurrence

1. Soit $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = u_n - 2n + 3$.
   a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
   b. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. À partir de quel rang la suite est-elle strictement décroissante ?
2. Soit $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + v_n^2$.
   a. Calculer v_1, v_2 et v_3.
   b. Montrer que la suite est croissante. En déduire que $v_n \geq 1$ pour tout n, puis que la suite est strictement croissante.
SenAcad, une solution de BarroTech
3. Soit $t_0 = 3$ et $t_{n+1} = \dfrac{t_n}{n+2}$. On admet que tous les termes sont strictement positifs.
   a. Calculer t_1, t_2 et t_3.
   b. En utilisant le quotient $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$, étudier le sens de variation de (t_n).

Leçon 3 : suites bornées, périodiques, comparaison

Exercice 5 : majorer, minorer, période

1. Soit $u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$.
   a. Montrer que $u_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$ pour tout n.
   b. En déduire que $2 < u_n \leq 3$ pour tout n. La suite est-elle bornée ?
2. Soit $v_n = n^2 - 10n$.
   a. Montrer que $v_n = (n-5)^2 - 25$. En déduire que la suite est minorée, et donner son plus petit terme.
   b. Montrer que, pour $n \geq 11$, $v_n \geq n$. La suite est-elle majorée ?
3. Soit $w_0 = 2$ et $w_{n+1} = \dfrac{1}{1 - w_n}$ (on admet que la suite est bien définie).
   a. Calculer w_1, w_2 et w_3.
   b. Soit $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Pour x différent de 0 et de 1, calculer $f\big(f(x)\big)$, puis $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$. En déduire que la suite est périodique de période 3.
   c. Calculer w_{2026}.
4. Soit $c_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$. Calculer c_0, ..., c_4. Montrer que la suite est périodique de période 4 et qu'elle est bornée. Calculer c_{2027}.

Exercice 6 : comparer deux suites

SenAcad, une solution de BarroTech

1. Comparer $u_n = n^2 + 1$ et $v_n = 2n$. Pour quelle valeur de n sont-elles égales ?
2. Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = \dfrac{n+3}{n+1}$ et $b_n = \dfrac{n+1}{n}$. Montrer que $a_n - b_n = \dfrac{n-1}{n(n+1)}$, puis comparer les deux suites.
3. Soit $c_n = n^2$ et $d_n = 10n$. Étudier le signe de $c_n - d_n$. À partir de quel rang a-t-on $c_n > d_n$?

Leçon 4 : raisonnement par récurrence

Exercice 7 : démontrer des égalités

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

1. $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;
2. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
3. $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.
4. On reprend la suite (v_n) de l'exercice 1 : $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = 2v_n - 1$. Démontrer que $v_n = 2^{n+1} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 : démontrer des inégalités

1. Soit $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.
   a. Calculer u_1, u_2 et u_3.
   b. Démontrer par récurrence que $u_n > 2$ pour tout n.
   c. En déduire que la suite est strictement décroissante.
   d. Démontrer par récurrence que $u_n = 2 + \frac{3}{2^n}$ pour tout n.
   e. En déduire un encadrement de u_n.
2. Démontrer par récurrence que $3^n \geq 2n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. a. Vérifier que l'inégalité $2^n \geq n^2$ est fausse pour $n = 3$ et vraie pour $n = 4$.
   b. Montrer que, pour $n \geq 4$, $2n^2 - (n+1)^2 = (n-1)^2 - 2 > 0$.
   c. Démontrer par récurrence que $2^n \geq n^2$ pour tout entier $n \geq 4$.

Leçon 5 : suites arithmétiques

Exercice 9 : suites arithmétiques, sommes

1. Montrer que la suite $u_n = 7 - 4n$ est arithmétique. Donner sa raison, son premier terme et son sens de variation.
2. (a_n) est une suite arithmétique telle que $a_5 = 17$ et $a_{12} = 38$.
   a. Calculer sa raison r et son premier terme a_0, puis exprimer a_n en fonction de n.
   b. Calculer a_{50}. Les nombres $2\,027$ et $2\,026$ sont-ils des termes de cette suite ?
   c. Calculer $S = a_0 + a_1 + \cdots + a_{30}$, puis $\sum_{k=10}^{30} a_k$.
3. Calculer la somme des nombres impairs de 1 à 99, puis la somme des multiples de 3 compris entre 100 et 300.
4. On reprend les carrés d'allumettes de l'exercice 2 : $m_n = 3n + 1$. On construit les rangées de 1, 2, …, 20 carrés. Combien d'allumettes faut-il en tout ?

Leçon 6 : suites géométriques

Exercice 10 : suites géométriques, sommes

1. Soit $v_n = \dfrac{3^{n+2}}{2^n}$. Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison, son premier terme et son sens de variation.
2. (u_n) est une suite géométrique telle que $u_3 = 40$ et $u_6 = 5$.
   a. Calculer sa raison q et son premier terme u_0, puis exprimer u_n en fonction de n.
   b. Donner son sens de variation et calculer u_{10}.
   c. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_7$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} (-2)^k$ de deux façons : avec la formule, puis en écrivant les termes.
4. **La légende de l'échiquier.** On pose 1 grain de riz sur la première case d'un échiquier, 2 sur la deuxième, 4 sur la troisième, et ainsi de suite en doublant jusqu'à la 64^{e} case. Exprimer le nombre total de grains à l'aide d'une puissance de 2, puis en donner un ordre de grandeur.

Exercice 11 : deux modèles simplifiés

Partie A : deux placements. On place $200\,000$ F pendant plusieurs années.

- Placement 1 (intérêts simples) : chaque année, on reçoit $6\,\%$ de la somme de départ, soit $12\,000$ F. On note s_n le capital au bout de n années.
- Placement 2 (intérêts composés) : chaque année, le capital augmente de $5\,\%$. On note c_n le capital au bout de n années.

1. Exprimer s_n et c_n en fonction de n. Préciser la nature de chaque suite.
2. Calculer s_5, c_5, s_{10} et c_{10} (arrondir au franc).
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien d'années le placement 2 rapporte plus que le placement 1.

Partie B : un village. En 2026, un village compte $4\,000$ habitants. Chaque année, $10\,\%$ des habitants partent, et 600 nouveaux habitants s'installent. On note p_n la population en $2026 + n$: $p_0 = 4\,000$ et $p_{n+1} = 0{,}9\,p_n + 600$.

1. Calculer p_1 et p_2.
2. On pose $q_n = p_n - 6\,000$. Montrer que (q_n) est géométrique de raison $0{,}9$; préciser q_0.
3. En déduire que $p_n = 6\,000 - 2\,000 \times 0{,}9^n$.
4. Montrer que la suite (p_n) est strictement croissante.
5. *(À faire après la leçon 7.)* Déterminer la limite de (p_n) et l'interpréter.

Leçon 7 : convergence

Exercice 12 : calculer des limites

1. Déterminer la limite de chaque suite.
   a. $a_n = 5 - \dfrac{2}{n^2}$ $(n \geq 1)$; b. $b_n = \dfrac{3n^2 - n + 2}{n^2 + 1}$; c. $c_n = \dfrac{n+1}{n^2+2}$; d. $d_n = n^2 - 5n$; e. $e_n = \sqrt{n^2+3} - n$ (expression conjuguée).
2. Même question.
   a. $0{,}8^n$; b. $2 \times 1{,}5^n$; c. $(-3)^n$; d. $7 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; e. $\dfrac{3^n + 1}{3^n}$.
3. Soit $S_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$. Calculer S_n en fonction de n, puis sa limite.
4. Soit $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$.
   a. Calculer u_1, ..., u_6 (valeurs approchées au centième) et les placer sur une droite graduée. Conjecturer la limite.
   b. Montrer que l'écart entre u_n et 2 vaut $\dfrac{1}{n}$. À partir de quel rang cet écart est-il inférieur à 10^{-3} ? Conclure.
5. Déterminer la limite de la suite de l'exercice 8, question 1.

SenAcad, une solution de BarroTech

S2-S4 Exercice de la leçon 8

Exercice 13 : réels en progression

1. Déterminer x pour que $2x-1$, $x+3$, $3x-2$ soient, dans cet ordre, en progression arithmétique. Donner les trois réels.
2. Déterminer le réel $x>0$ tel que x, $x+4$, $4x$ soient, dans cet ordre, en progression géométrique. Donner les trois réels et la raison.
3. Trois réels en progression arithmétique ont pour somme 27, et la somme de leurs carrés vaut 275. Les déterminer.
4. Trois réels en progression géométrique ont pour produit 64 et pour somme 14. Les déterminer.
5. *(Modèle simplifié.)* Un prix passe de $8\,000$ F à $9\,680$ F en deux hausses successives de même pourcentage. Quel est le prix intermédiaire ? Quel est le pourcentage de chaque hausse ?
6. Les trois angles d'un triangle sont en progression arithmétique. Montrer que l'un d'eux mesure 60°.

SenAcad, une solution de BarroTech

S1-S3 Exercice de la leçon 9

Exercice 14 : suites récurrentes, construction graphique

1. Pour chaque suite, donner la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{u_n + 1}$; b. $u_{n+1} = u_n^2 - 1$; c. $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$.
2. Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$. La figure de gauche représente $f : x \mapsto 2\sqrt{x}$ et la droite $\Delta : y = x$, dans un repère orthonormé.
   a. Construire sur l'axe des abscisses u_1, u_2 et u_3. Calculer leurs valeurs (exactes, puis approchées au centième).
   b. Conjecturer le sens de variation de la suite et son comportement. Résoudre $2\sqrt{x} = x$.
   c. Démontrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 4$ pour tout n.
   d. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}\left(2 - \sqrt{u_n}\right)$, puis que la suite est croissante.
   e. On admet que (u_n) converge vers un réel ℓ. Que peut-on dire de ℓ ?
3. Soit $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 3$. La figure de droite représente $h : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x + 3$ et Δ.
   a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, puis construire ces termes sur la figure. Que conjecture-t-on ?
   b. Démontrer par récurrence que $u_n = 2 + 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$, puis en déduire la limite de la suite.
4. À l'aide des suites de référence, déterminer la limite de : a. $3 + \dfrac{1}{n^3}$; b. $\dfrac{5}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{10^n}$; c. $\left(2 + \dfrac{1}{n^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

SenAcad, une solution de BarroTech



