Corrigés détaillés

PREMIÈRE S · CHAPITRE 5 · SUITES NUMÉRIQUES

Corrigés détaillés des exercices d'application. Tous les résultats ont été vérifiés par calcul exact, et recoupés par un calcul numérique indépendant. L'exercice 13 est réservé aux séries S2-S4, l'exercice 14 aux séries S1-S3.

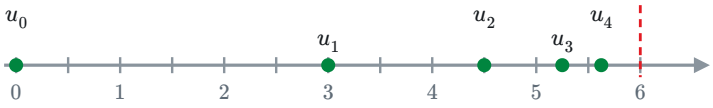
Leçon 1 : qu'est-ce qu'une suite ?

Exercice 1

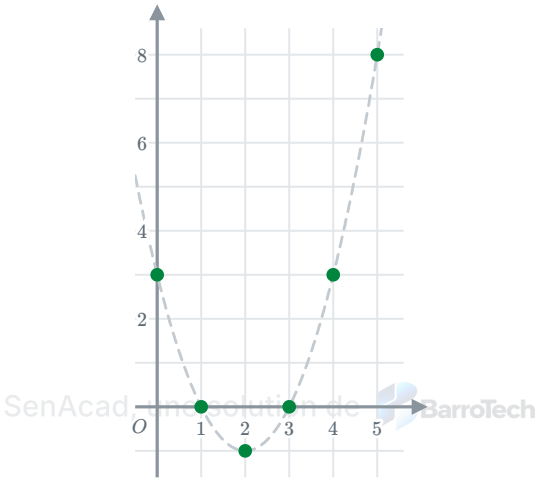
1. a. $u_0 = 1$, $u_1 = 2 - 5 + 1 = -2$, $u_2 = 8 - 10 + 1 = -1$, $u_{10} = 200 - 50 + 1 = 151$.
   b. On remplace n par $n+1$: $u_{n+1} = 2(n+1)^2 - 5(n+1) + 1 = 2n^2 + 4n + 2 - 5n - 5 + 1 = 2n^2 - n - 2$.
   Et $u_n + 1 = 2n^2 - 5n + 2$. La différence vaut $(2n^2 - n - 2) - (2n^2 - 5n + 2) = 4n - 4$: les deux expressions ne sont égales que pour $n = 1$ (en effet $u_2 = -1 = u_1 + 1$). En général, u_{n+1} et $u_n + 1$ sont différents.
2. $v_1 = 2 \times 3 - 1 = 5$, $v_2 = 9$, $v_3 = 17$, $v_4 = 33$.
3. $\sqrt{n-4}$ existe si et seulement si $n \geq 4$: la suite est définie à partir du rang 4, et son premier terme est $w_4 = 0$. Puis $w_5 = 1$, $w_8 = \sqrt{4} = 2$, $w_{13} = \sqrt{9} = 3$.
4. $s_0 = u_0 + v_0 = 1 + 3 = 4$; $s_2 = u_2 + v_2 = -1 + 9 = 8$; $p_1 = u_1 v_1 = -2 \times 5 = -10$.

Exercice 2

1. a. $u_1 = 3$, $u_2 = 4{,}5$, $u_3 = 5{,}25$, $u_4 = 5{,}625$.
   b. Les termes se placent de gauche à droite, de plus en plus serrés : la suite semble croissante, et ses termes semblent s'accumuler près de 6 (conjecture).



2. $v_0 = 3$, $v_1 = 0$, $v_2 = -1$, $v_3 = 0$, $v_4 = 3$, $v_5 = 8$. Les points M_n sont sur la parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 3$ (car $v_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 - 4x + 3$). On **ne les relie pas** : n ne prend que des valeurs entières.



SenAcad — Solution de BarroTech

3. a. Chaque nouveau carré demande 3 allumettes de plus : $m_4 = 13$.
   b. $m_{n+1} = m_n + 3$.
   c. $3 \times 1 + 1 = 4$, $3 \times 2 + 1 = 7$, $3 \times 3 + 1 = 10$, $3 \times 4 + 1 = 13$: la formule est vérifiée.
   d. $3n + 1 = 100$ donne $n = 33$: on forme 33 carrés.

Leçon 2 : sens de variation

Exercice 3

1. $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 6(n+1) + 1 - (n^2 - 6n + 1) = 2n - 5$. Cette différence est négative pour $n \leq 2$ et positive pour $n \geq 3$. Les termes valent $u_0 = 1$, $u_1 = -4$, $u_2 = -7$, $u_3 = -8$, $u_4 = -7$: la suite décroît strictement de u_0 à u_3, puis elle est strictement croissante à partir du rang 3. Elle n'est pas monotone.
2. $v_{n+1} - v_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$: (v_n) est strictement croissante.
3. Les termes sont strictement positifs et $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{3^{n+1}}{n+3} \times \dfrac{n+2}{3^n} = \dfrac{3(n+2)}{n+3}$. Or $3n + 6 > n + 3$ (car $2n + 3 > 0$), donc le quotient est strictement supérieur à 1 : (w_n) est strictement croissante.
4. f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{-(x+2) - (5-x)}{(x+2)^2} = \dfrac{-7}{(x+2)^2} < 0$. f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$, donc (z_n), avec $z_n = f(n)$, est strictement décroissante.
5. $t_0 = 0$, $t_1 = -1$, $t_2 = 2$, $t_3 = -3$. Comme $t_1 < t_0$ et $t_2 > t_1$, la suite n'est ni croissante ni décroissante : elle n'est pas monotone.

Exercice 4

1. a. $u_1 = 10 - 0 + 3 = 13$, $u_2 = 13 - 2 + 3 = 14$, $u_3 = 14 - 4 + 3 = 13$, $u_4 = 13 - 6 + 3 = 10$.
   b. $u_{n+1} - u_n = 3 - 2n$: positive pour $n \leq 1$, strictement négative pour $n \geq 2$. La suite est strictement décroissante à partir du rang 2.
2. a. $v_1 = 1 + 1 = 2$, $v_2 = 2 + 4 = 6$, $v_3 = 6 + 36 = 42$.
   b. $v_{n+1} - v_n = v_n^2 \geq 0$: la suite est croissante. Elle est donc minorée par son premier terme : $v_n \geq v_0 = 1$. Alors $v_n^2 \geq 1 > 0$, et $v_{n+1} - v_n > 0$: la suite est strictement croissante.
3. a. $t_1 = \dfrac{3}{2}$, $t_2 = \dfrac{3/2}{3} = \dfrac{1}{2}$, $t_3 = \dfrac{1/2}{4} = \dfrac{1}{8}$.
   b. $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{1}{n+2} \leq \dfrac{1}{2} < 1$, et les termes sont strictement positifs : (t_n) est strictement décroissante.

Leçon 3 : suites bornées, périodiques, comparaison

Exercice 5

1. a. $2 + \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{2(n+1)+1}{n+1} = \dfrac{2n+3}{n+1} = u_n$.
   b. Pour tout n, $0 < \dfrac{1}{n+1} \leq 1$, donc $2 < u_n \leq 3$. La suite est bornée (majorée par 3, minorée par 2).
2. a. $(n-5)^2 - 25 = n^2 - 10n + 25 - 25 = v_n$. Un carré est positif, donc $v_n \geq -25$: la suite est minorée par -25, et son plus petit terme est $v_5 = -25$.
   b. $v_n = n(n-10)$. Pour $n \geq 11$, $n - 10 \geq 1$, donc $v_n \geq n$. Les termes dépassent n'importe quel réel : la suite n'est pas majorée.
3. a. $w_1 = \dfrac{1}{1-2} = -1$, $w_2 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$, $w_3 = \dfrac{1}{1-1/2} = 2$.
   b. $f\big(f(x)\big) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \dfrac{1-x}{(1-x)-1} = \dfrac{x-1}{x}$, puis $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = \dfrac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x$. Comme $w_{n+3} = f\Big(f\big(f(w_n)\big)\Big)$, on obtient $w_{n+3} = w_n$ pour tout n : la suite est périodique de période 3 (elle vaut $2, -1, \frac{1}{2}, 2, -1, \frac{1}{2}, \ldots$).
   c. $2\,026 = 3 \times 675 + 1$, donc $w_{2026} = w_1 = -1$.
4. $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = -1$, $c_3 = 0$, $c_4 = 1$. Pour tout n, $c_{n+4} = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2} + 2\pi\right) = c_n$: période 4. Et $-1 \leq c_n \leq 1$: la suite est bornée. $2\,027 = 4 \times 506 + 3$, donc $c_{2027} = c_3 = 0$.

Exercice 6

SenAcad, une solution de BarroTech

1. $u_n - v_n = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 \geq 0$: $u_n \geq v_n$ pour tout n, avec égalité pour $n = 1$ seulement ($u_1 = v_1 = 2$).
2. $a_n - b_n = \dfrac{(n+3)\,n - (n+1)^2}{n(n+1)} = \dfrac{n^2 + 3n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)} = \dfrac{n-1}{n(n+1)}$. Pour $n \geq 1$, ce nombre est positif ou nul : $a_n \geq b_n$, avec égalité pour $n = 1$ ($a_1 = b_1 = 2$).
3. $c_n - d_n = n^2 - 10n = n(n-10)$: nul pour $n = 0$ et $n = 10$, négatif pour $1 \leq n \leq 9$, strictement positif pour $n \geq 11$. On a $c_n > d_n$ à partir du rang 11.

Leçon 4 : raisonnement par récurrence

Exercice 7

1. **Initialisation.** Pour $n = 1$: $1 = \dfrac{1 \times 2}{2}$.
   Hérédité. Si $1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, alors $1 + \cdots + n + (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
   Conclusion. La formule est vraie pour tout $n \geq 1$.
2. **Initialisation.** $1^2 = 1 = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{6}$.
   Hérédité. Si $1^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, alors en ajoutant $(n+1)^2$:
   $$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\left(2n^2+n+6n+6\right)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$
   car $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$. C'est la formule au rang $n+1$.
3. **Initialisation.** $\dfrac{1}{1 \times 2} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1+1}$.
   Hérédité. Si la somme vaut $\dfrac{n}{n+1}$ au rang n, alors au rang $n+1$ elle vaut
   $$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$
4. **Initialisation.** $2^1 + 1 = 3 = v_0$.
   Hérédité. Si $v_n = 2^{n+1} + 1$, alors $v_{n+1} = 2\left(2^{n+1}+1\right) - 1 = 2^{n+2} + 1$.
   Conclusion. $v_n = 2^{n+1} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

SenAcad, une solution de Barrolech

Exercice 8

1. a. $u_1 = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$, $u_2 = \dfrac{11}{4} = 2{,}75$, $u_3 = \dfrac{19}{8} = 2{,}375$.
   b. **Initialisation.** $u_0 = 5 > 2$. **Hérédité.** Si $u_n > 2$, alors $\dfrac{1}{2}u_n > 1$, donc $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 > 2$.
   Conclusion. $u_n > 2$ pour tout n.
   c. $u_{n+1} - u_n = 1 - \dfrac{1}{2}u_n = \dfrac{1}{2}(2 - u_n) < 0$, car $u_n > 2$: la suite est strictement décroissante.
   d. **Initialisation.** $2 + \dfrac{3}{2^0} = 5 = u_0$. **Hérédité.** Si $u_n = 2 + \dfrac{3}{2^n}$, alors $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(2 + \dfrac{3}{2^n}\right) + 1 = 2 + \dfrac{3}{2^{n+1}}$.
   e. La suite est décroissante, donc $u_n \leq u_0 = 5$; et $u_n > 2$. Ainsi $2 < u_n \leq 5$.
2. **Initialisation.** $3^0 = 1 \geq 2 \times 0 + 1$. **Hérédité.** Si $3^n \geq 2n + 1$, alors $3^{n+1} = 3 \times 3^n \geq 6n + 3 \geq 2n + 3 = 2(n+1) + 1$, car $4n \geq 0$. **Conclusion.** $3^n \geq 2n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. a. $2^3 = 8 < 9 = 3^2$: fausse pour $n = 3$. $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$: vraie pour $n = 4$.
   b. $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$. Pour $n \geq 4$, $(n-1)^2 \geq 9$, donc ce nombre est strictement positif.
   c. **Initialisation** au rang 4 (question a). **Hérédité.** Soit $n \geq 4$ tel que $2^n \geq n^2$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2 > (n+1)^2$ (question b). **Conclusion.** $2^n \geq n^2$ pour tout $n \geq 4$. *L'initialisation doit se faire au rang 4 : l'inégalité est fausse au rang 3.*

Leçon 5 : suites arithmétiques

Exercice 9

1. $u_{n+1} - u_n = 7 - 4(n+1) - (7 - 4n) = -4$: la suite est arithmétique, de raison -4 et de premier terme $u_0 = 7$. Comme $r < 0$, elle est strictement décroissante.
2. a. $a_{12} = a_5 + 7r$, donc $7r = 21$ et $r = 3$. Puis $a_0 = a_5 - 5r = 2$, et $a_n = 2 + 3n$.
   b. $a_{50} = 152$. $2 + 3n = 2\,027$ donne $n = 675$: $2\,027 = a_{675}$ est un terme. $2 + 3n = 2\,026$ donnerait $3n = 2\,024$, qui n'est pas un multiple de 3 : $2\,026$ n'est pas un terme.
   c. S compte 31 termes, de $a_0 = 2$ à $a_{30} = 92$: $S = 31 \times \dfrac{2 + 92}{2} = 31 \times 47 = 1\,457$.
   $\displaystyle\sum_{k=10}^{30} a_k$ compte $30 - 10 + 1 = 21$ termes, de $a_{10} = 32$ à $a_{30} = 92$: elle vaut $21 \times \dfrac{32 + 92}{2} = 21 \times 62 = 1\,302$.
3. Les nombres impairs de 1 à 99 forment une suite arithmétique de raison 2, avec 50 termes : leur somme vaut $50 \times \dfrac{1 + 99}{2} = 2\,500$ (c'est 50^2, comme à la leçon 4).
   Les multiples de 3 entre 100 et 300 vont de 102 à 300, de raison 3 : il y en a $\dfrac{300 - 102}{3} + 1 = 67$.
   Leur somme vaut $67 \times \dfrac{102 + 300}{2} = 67 \times 201 = 13\,467$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{20}(3n + 1)$ compte 20 termes, de $m_1 = 4$ à $m_{20} = 61$: il faut $20 \times \dfrac{4 + 61}{2} = 650$ allumettes.

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 6 : suites géométriques

Exercice 10

1. $v_{n+1} = \dfrac{3^{n+3}}{2^{n+1}} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{3^{n+2}}{2^n} = \dfrac{3}{2}\,v_n$: la suite est géométrique, de raison $\dfrac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 = 9$. Comme $v_0 > 0$ et $\dfrac{3}{2} > 1$, elle est strictement croissante.
2. a. $u_6 = u_3\,q^3$, donc $q^3 = \dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8}$ et $q = \dfrac{1}{2}$. Puis $u_0 = \dfrac{u_3}{q^3} = 40 \times 8 = 320$, et $u_n = 320 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{320}{2^n}$.
   b. $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$: la suite est strictement décroissante. $u_{10} = \dfrac{320}{1\,024} = \dfrac{5}{16} = 0{,}312\,5$.
   c. $S = 320 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8}{1 - \frac{1}{2}} = 640 \times \dfrac{255}{256} = 637{,}5$. *Vérification :* $320 + 160 + 80 + 40 + 20 + 10 + 5 + 2{,}5 = 637{,}5$.
3. Avec la formule ($q = -2$, 6 termes) : $\dfrac{1 - (-2)^6}{1 - (-2)} = \dfrac{1 - 64}{3} = -21$. En écrivant les termes : $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 = -21$.
4. Le nombre de grains est $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = \dfrac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$, soit environ $1{,}8 \times 10^{19}$ grains.

Exercice 11

Partie A.

1. $s_n = 200\,000 + 12\,000\,n$: suite arithmétique de raison $12\,000$. $c_n = 200\,000 \times 1{,}05^n$: suite géométrique de raison $1{,}05$.
2. $s_5 = 260\,000$ F et $c_5 \approx 255\,256$ F ; $s_{10} = 320\,000$ F et $c_{10} \approx 325\,779$ F.
3. À la calculatrice : $c_8 \approx 295\,491 < s_8 = 296\,000$, et $c_9 \approx 310\,266 > s_9 = 308\,000$. Le placement 2 rapporte plus à partir de 9 années (et l'écart ne fait ensuite que grandir : on multiplie, au lieu d'ajouter).

Partie B.

1. $p_1 = 0{,}9 \times 4\,000 + 600 = 4\,200$; $p_2 = 0{,}9 \times 4\,200 + 600 = 4\,380$.
2. $q_{n+1} = p_{n+1} - 6\,000 = 0{,}9\,p_n + 600 - 6\,000 = 0{,}9\,p_n - 5\,400 = 0{,}9\,(p_n - 6\,000) = 0{,}9\,q_n$. La suite (q_n) est géométrique de raison $0{,}9$, et $q_0 = 4\,000 - 6\,000 = -2\,000$.
3. $q_n = -2\,000 \times 0{,}9^n$, donc $p_n = q_n + 6\,000 = 6\,000 - 2\,000 \times 0{,}9^n$.
4. $p_{n+1} - p_n = -2\,000 \times 0{,}9^{n+1} + 2\,000 \times 0{,}9^n = 2\,000 \times 0{,}9^n \times (1 - 0{,}9) = 200 \times 0{,}9^n > 0$: la suite est strictement croissante.
5. Comme $-1 < 0{,}9 < 1$, $0{,}9^n \to 0$, donc $\lim p_n = 6\,000$. Dans ce modèle simplifié, la population augmente et se rapproche de $6\,000$ habitants, sans les atteindre.

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 7 : convergence

Exercice 12

1. a. $\frac{2}{n^2} \to 0$, donc $\lim a_n = 5$.
   b. Terme de plus haut degré : même limite que $\frac{3n^2}{n^2} = 3$. Donc $\lim b_n = 3$.
   c. Même limite que $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, donc $\lim c_n = 0$.
   d. Forme $\infty - \infty$: $d_n = n^2\left(1 - \frac{5}{n}\right)$, avec $n^2 \to +\infty$ et $1 - \frac{5}{n} \to 1$. Donc $\lim d_n = +\infty$.
   e. $e_n = \frac{(n^2+3) - n^2}{\sqrt{n^2+3} + n} = \frac{3}{\sqrt{n^2+3} + n}$; le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim e_n = 0$.
2. a. $-1 < 0{,}8 < 1$: $0{,}8^n \to 0$.
   b. $1{,}5 > 1$: $1{,}5^n \to +\infty$, donc $2 \times 1{,}5^n \to +\infty$.
   c. $-3 \leq -1$: $(-3)^n$ n'a pas de limite (ses termes sont alternativement très grands et positifs, très grands en valeur absolue et négatifs).
   d. $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$, donc la limite vaut 7.
   e. $\frac{3^n + 1}{3^n} = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n \to 1$.
3. Suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$, $n+1$ termes : $S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$. Comme $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \to 0$, $\lim S_n = \frac{3}{2}$.
SenAcad, une solution de BarroTech
4. a. $u_1 = 1$, $u_2 = 2{,}5$, $u_3 \approx 1{,}67$, $u_4 = 2{,}25$, $u_5 = 1{,}8$, $u_6 \approx 2{,}17$. Sur l'axe, les termes sautent de part et d'autre de 2 en s'en rapprochant : on conjecture que la limite vaut 2.
   b. $u_n - 2 = \frac{(-1)^n}{n}$, donc l'écart vaut $\frac{1}{n}$. On a $\frac{1}{n} < 10^{-3}$ si et seulement si $n > 1\,000$, c'est-à-dire à partir du rang $1\,001$. L'écart devient aussi petit que l'on veut : la suite converge vers 2.
5. $u_n = 2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, et $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$: $\lim u_n = 2$.

S2-S4 Exercice de la leçon 8

Exercice 13

1. Il faut $(2x-1)+(3x-2)=2(x+3)$, soit $5x-3=2x+6$, donc $x=3$. Les réels sont 5, 6, 7 (raison 1).
2. Pour $x>0$, les trois réels sont non nuls : il faut $(x+4)^2=x\times 4x$, soit $3x^2-8x-16=0$, dont les solutions sont 4 et $-\dfrac{4}{3}$. Avec $x>0$: $x=4$. Les réels sont 4, 8, 16, de raison 2.
3. On les écrit $b-r$, b, $b+r$. Leur somme vaut $3b=27$, donc $b=9$. La somme des carrés vaut $(9-r)^2+81+(9+r)^2=243+2r^2=275$, donc $r^2=16$ et $r=\pm 4$. Les réels sont 5, 9, 13 (ou 13, 9, 5).
4. On les écrit $\dfrac{b}{q}$, b, bq. Leur produit vaut $b^3=64$, donc $b=4$. Puis $\dfrac{4}{q}+4+4q=14$, soit $4q^2-10q+4=0$, ou $2q^2-5q+2=0$: $q=2$ ou $q=\dfrac{1}{2}$. Les réels sont 2, 4, 8 (ou 8, 4, 2).
5. Les trois prix sont en progression géométrique : $x^2=8\,000\times 9\,680=77\,440\,000$, donc $x=8\,800$ F. La raison vaut $\dfrac{8\,800}{8\,000}=1{,}1$: chaque hausse est de $10\,\%$.
6. Soit a, b, c les angles (en degrés), en progression arithmétique : $a+c=2b$. Comme $a+b+c=180$, on obtient $3b=180$, donc $b=60^\circ$.

SenAcad, une solution de BarroTech

S1-S3 Exercice de la leçon 9

Exercice 14

1. a. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$; b. $f(x) = x^2 - 1$; c. $f(x) = 2\sqrt{x}$.
2. a. $u_1 = 2\sqrt{1} = 2$, $u_2 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$, $u_3 = 2\sqrt{2\sqrt{2}} \approx 3{,}36$. La construction est sur la figure de gauche ci-dessous.
   b. L'escalier monte vers le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de Δ : on conjecture que la suite est croissante et qu'elle converge vers 4. Pour $x \geq 0$, $2\sqrt{x} = x \iff 4x = x^2 \iff x = 0$ ou $x = 4$.
   c. **Initialisation.** $1 \leq u_0 = 1 \leq 4$. **Hérédité.** Si $1 \leq u_n \leq 4$, alors $1 \leq \sqrt{u_n} \leq 2$ (la racine carrée est croissante), donc $2 \leq 2\sqrt{u_n} \leq 4$, et a fortiori $1 \leq u_{n+1} \leq 4$. **Conclusion.** $1 \leq u_n \leq 4$ pour tout n.
   d. $u_{n+1} - u_n = 2\sqrt{u_n} - u_n = \sqrt{u_n}\left(2 - \sqrt{u_n}\right)$. Comme $1 \leq \sqrt{u_n} \leq 2$, ce produit est positif : la suite est croissante.
   e. Par passage à la limite dans l'inégalité $1 \leq u_n \leq 4$: $1 \leq \ell \leq 4$. *(En Terminale, on montrera que $\ell = 4$.)*
3. a. $u_1 = -2 + 3 = 1$, $u_2 = 2{,}5$, $u_3 = 1{,}75$, $u_4 = 2{,}125$. La construction dessine une spirale autour du point $(2\,;2)$ (figure de droite) : la suite n'est pas monotone, et on conjecture qu'elle converge vers 2.
   b. **Initialisation.** $2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 4 = u_0$. **Hérédité.** Si $u_n = 2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, alors

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}\left(2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) + 3 = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

   Comme $-1 < -\dfrac{1}{2} < 1$, $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$, donc $\lim u_n = 2$.
4. a. $\dfrac{1}{n^3} \to 0$ (suite de référence, $\alpha = 3$) : la limite vaut 3.
   b. $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ et $\dfrac{1}{10^n} \to 0$: la limite vaut $5 \times 0 - 0 = 0$.
   c. $2 + \dfrac{1}{n^2} \to 2$ et $1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 1$: la limite vaut 2.

