Exercices

PREMIÈRE S · CHAPITRE 4 · ÉTUDE DE FONCTIONS

Exercices classés par leçon, du plus simple au plus complet. Les exercices 1 à 12 sont communs à toutes les séries S. L'exercice 13 est réservé aux séries S2, S4, S2A et S5. Les exercices 14 et 15 sont réservés aux séries S1, S3 et S1A. Pour les tracés, prends un repère orthonormé d'unité 1 cm (ou 2 cm si la courbe est petite), sauf indication contraire. Calculatrice autorisée pour placer des points. Les corrigés détaillés sont dans la fiche « Corrigés ».

Leçon 1 : le plan d'étude ; fonctions polynômes

Exercice 1 : étude complète d'une fonction polynôme de degré 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x + 2$, et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de f. Préciser les extremums.
3. Montrer que le point $\Omega(0\,;2)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
4. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = -(x+1)^2(x-2)$. En déduire les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes de coordonnées.
5. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point Ω.
6. Tracer T et $\mathcal{C}$.

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 2 : une fonction toujours croissante

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$, et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = (x+1)^3 - 2$. En déduire que $\mathcal{C}$ est l'image de la courbe de la fonction cube par une translation dont on précisera le vecteur.
2. Calculer $f'(x)$. La dérivée s'annule-t-elle ? Change-t-elle de signe ? En utilisant la question 1, justifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis dresser son tableau de variations.
4. Montrer que $\Omega(-1\,;-2)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$. Quelle est la tangente à $\mathcal{C}$ en Ω ?
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$, puis que $0{,}2 < \alpha < 0{,}3$.
6. Tracer $\mathcal{C}$.

Leçon 2 : fonctions homographiques

Exercice 3 : étude d'une fonction homographique

Soit $f(x) = \dfrac{3x-2}{x-1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Donner l'ensemble de définition D_f de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f. En déduire les asymptotes de $\mathcal{C}$.
3. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
4. Vérifier que, pour $x \neq 1$, $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-1}$. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à son asymptote horizontale.
5. Montrer que le point d'intersection Ω des asymptotes est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
6. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes, puis une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.
7. Tracer les asymptotes, la tangente et $\mathcal{C}$.

Exercice 4 : retrouver une fonction homographique

On cherche une fonction f de la forme $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$, où a, b, c sont des réels, dont la courbe $\mathcal{C}$ vérifie les trois conditions suivantes : la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale ; la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale ; $\mathcal{C}$ passe par le point $A(0\,;2)$.

1. Justifier que $c = 2$ et $a = 1$, puis que $b = 4$.
2. On a donc $f(x) = \dfrac{x+4}{x+2}$. Calculer $ad - bc$ pour cette fonction homographique (avec les notations de la leçon 2), puis dresser le tableau de variations de f avec les limites.
3. Donner le centre de symétrie de $\mathcal{C}$ et une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en A.
4. Tracer $\mathcal{C}$.

Leçon 3 : asymptote oblique

Exercice 5 : justifier une asymptote oblique

1. Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x + 1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe.
   a. Vérifier que, pour $x \neq -1$, $f(x) = x - \dfrac{1}{x+1}$.
   b. Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   c. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D.
   d. Calculer les limites de f à gauche et à droite en -1. Interpréter graphiquement.
2. Soit $g(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 4}{x - 2}$ et Δ la droite d'équation $y = 2x - 1$. Montrer que Δ est asymptote à la courbe de g en $\pm\infty$, et préciser leur position.

Exercice 6 : trouver l'écriture, puis les asymptotes

1. Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe.
   a. Déterminer les réels a, b, c tels que, pour tout $x \neq 2$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$.
   b. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique D, dont on donnera une équation, et étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D.
   c. Montrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale.
   d. Montrer que le point d'intersection Ω des deux asymptotes est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
2. Soit $h(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$. Justifier que la courbe de h admet une asymptote horizontale, et étudier leur position.

Leçon 4 : étude complète d'une fonction rationnelle

Exercice 7 : étude complète

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Donner D_f et vérifier que, pour $x \in D_f$, $f(x) = x + \dfrac{4}{x+1}$.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes, dont une oblique D, et étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D.
3. Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$ et dresser le tableau de variations de f.
4. Montrer que le point $\Omega(-1\,;-1)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
5. La courbe coupe-t-elle l'axe des abscisses ? L'axe des ordonnées ?
6. Tracer les asymptotes et $\mathcal{C}$.

Exercice 8 : numérateur de degré 1, dénominateur de degré 2

Soit $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est impaire.
2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
3. Montrer que $f'(x) = \dfrac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ à l'origine. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T.
5. Tracer T et $\mathcal{C}$ (unité 2 cm).

SanAcad, une solution de BarroTech

Leçon 5 : fonctions irrationnelles

Exercice 9 : une demi-tangente verticale

Soit $f(x) = (x+1)\sqrt{2-x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Étudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Montrer que, pour $x < 2$, $f'(x) = \dfrac{3(1-x)}{2\sqrt{2-x}}$.
4. Calculer la limite de f en $-\infty$, puis dresser le tableau de variations de f.
5. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes.
6. Tracer $\mathcal{C}$.

Exercice 10 : une asymptote verticale et une inégalité

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$.

1. Vérifier que $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
2. Calculer la limite de f en 0 (à droite) et en $+\infty$. Interpréter graphiquement la première.
3. Montrer que $f'(x) = \dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ et dresser le tableau de variations de f.
4. En déduire que, pour tout réel $x > 0$, $x + 1 \geq 2\sqrt{x}$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?
5. Calculer $f(4)$ et $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$, puis tracer la courbe de f.

GenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 6 : fonctions trigonométriques

Exercice 11 : une composée de cosinus et d'une fonction affine

Soit $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est périodique de période π.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\pi]$ (on pourra poser $t = 2x - \frac{\pi}{3}$), puis dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\pi]$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans $[0\,;\pi]$.
5. Tracer la courbe de f sur $[0\,;\pi]$, puis sur $[-\pi\,;2\pi]$.

Exercice 12 : tangente et première bissectrice

Soit f la fonction définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan x - x$.

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que $f'(x) = \tan^2 x$. En déduire le sens de variation de f sur I.
3. Calculer les limites de f en $\frac{\pi}{2}$ (à gauche) et en $-\frac{\pi}{2}$ (à droite). Interpréter graphiquement.
4. Donner la tangente à la courbe de f à l'origine.
5. En déduire que, pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x \geq x$. Interpréter graphiquement à l'aide de la courbe de la fonction tangente et de la droite d'équation $y = x$.
6. Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe.

SenAcad, une solution de BarroTech

S2-S4 Exercice de la leçon 7

Exercice 13 : résolutions graphiques et discussion

On reprend la fonction f de l'exercice 1 : $f(x) = -x^3 + 3x + 2$, de courbe $\mathcal{C}$, et l'on note Δ la droite d'équation $y = 2 - x$.

1. À l'aide du tableau de variations de f, discuter, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
2. Pour $m = 4$, vérifier que $f(x) - 4 = -(x-1)^2(x+2)$ et donner les solutions.
3. Tracer $\mathcal{C}$ et Δ dans un même repère. Lire graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 2 - x$, puis celles de l'inéquation $f(x) \geq 2 - x$.
4. Retrouver ces résultats par le calcul, en factorisant $f(x) - (2 - x)$.

SenAcad, une solution de BarroTech

S1-S3 Exercices de la leçon 8

Exercice 14 : déterminer une asymptote oblique

1. Soit $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{x + 1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe.
   a. Effectuer la division de $2x^2 + 3x - 1$ par $x + 1$. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique D, et préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D.
   b. Étudier les limites de f en -1. En déduire une seconde asymptote.
   c. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
   d. Montrer que le point d'intersection des asymptotes est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
   e. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes, puis tracer $\mathcal{C}$.
2. Déterminer l'asymptote oblique de la courbe de $h(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{2x - 2}$.

Exercice 15 : fonctions avec valeur absolue

Soit $u(x) = x^2 + 2x - 3$.

1. Factoriser $u(x)$, étudier les variations de u et tracer sa courbe $\mathcal{P}$.
2. Soit $f(x) = |u(x)|$. Écrire $f(x)$ sans valeur absolue sur chaque intervalle, puis, à l'aide de $\mathcal{P}$, dresser le tableau de variations de f.
3. Étudier la dérivabilité de f en -3 et en 1. Interpréter graphiquement.
4. Soit $g(x) = x^2 + 2|x| - 3$. Vérifier que $g(x) = u(|x|)$, justifier que g est paire, puis donner son sens de variation à partir de $\mathcal{P}$.
5. Étudier la dérivabilité de g en 0. Interpréter graphiquement.
6. Tracer les courbes de f et de g dans deux repères différents.

SenAcad, une solution de BarroTech