Corrigés détaillés

PREMIÈRE S · CHAPITRE 4 · ÉTUDE DE FONCTIONS

Corrigés détaillés des exercices d'application. Tous les résultats ont été vérifiés par calcul exact, et recoupés par un calcul numérique indépendant. L'exercice 13 est réservé aux séries S2-S4, les exercices 14 et 15 aux séries S1-S3. Dans les tableaux, ‖ signale une valeur interdite.

Leçon 1 : le plan d'étude ; fonctions polynômes

Exercice 1

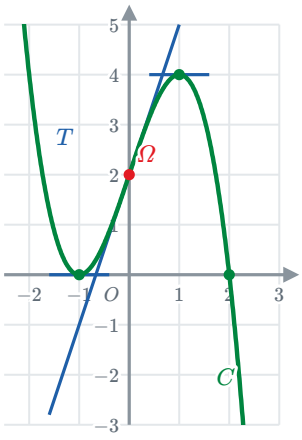
1. Par le terme de plus haut degré, $-x^3$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2. $f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x-1)(x+1)$. Ce trinôme, de coefficient $-3 < 0$, est négatif à l'extérieur de -1 et 1, positif entre eux. $f(-1) = 1 - 3 + 2 = 0$ et $f(1) = -1 + 3 + 2 = 4$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

Minimum local 0 en -1, maximum local 4 en 1.

SenAcad, une solution de RamTech

3. Ici $a = 0$ et $b = 2$: pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) + f(x) = (x^3 - 3x + 2) + (-x^3 + 3x + 2) = 4 = 2 \times 2$. Donc $\Omega(0\,;2)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
4. $-(x+1)^2(x-2) = -(x^2+2x+1)(x-2) = -(x^3 - 3x - 2) = -x^3 + 3x + 2 = f(x)$. Donc $f(x) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 2$: $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en $(2\,;0)$, et le touche en $(-1\,;0)$, où la tangente est horizontale (minimum local). Elle coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;2)$, c'est-à-dire en Ω.
5. $f(0) = 2$ et $f'(0) = 3$: $T : y = 3x + 2$.
6. On place $(-1\,;0)$ et $(1\,;4)$ avec leurs tangentes horizontales, Ω et T, $(2\,;0)$, $(-2\,;4)$, puis on suit le tableau.



Courbe de f, tangente T en Ω

Exercice 2

1. $(x+1)^3-2=x^3+3x^2+3x+1-2=f(x)$. Avec $c(x)=x^3$, on a $f(x)=c\big(x-(-1)\big)+(-2)$: $\mathcal{C}$ est l'image de la courbe de la fonction cube par la translation de vecteur $\vec{u}(-1\,;-2)$ (chapitre 1).
2. $f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2$. Elle s'annule en -1 seulement, et **ne change pas de signe** (elle est positive ailleurs). La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: si $a<b$, alors $a+1<b+1$, donc $(a+1)^3<(b+1)^3$ et $f(a)<f(b)$. Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: elle n'a pas d'extremum.
3. Par le terme de plus haut degré, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

4. Pour tout réel x : $f(-2-x)=(-1-x)^3-2=-(x+1)^3-2$, donc $f(-2-x)+f(x)=-4=2\times(-2)$: $\Omega(-1\,;-2)$ est centre de symétrie. Comme $f'(-1)=0$, la tangente en Ω est la droite horizontale $y=-2$; la courbe la traverse.
5. f est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$: c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ (chapitre 3). Comme $0\in\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=0$ a une solution unique α. Ensuite $f(0{,}2)=1{,}2^3-2=-0{,}272<0$ et $f(0{,}3)=1{,}3^3-2=0{,}197>0$; f étant croissante, $0{,}2<\alpha<0{,}3$.
6. On place $\Omega(-1\,;-2)$ avec sa tangente horizontale, $(0\,;-1)$, $(-2\,;-3)$, $(1\,;6)$: la courbe est celle de la fonction cube, translatée.

Leçon 2 : fonctions homographiques

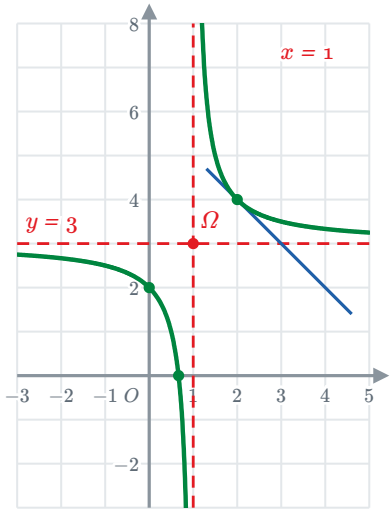
Exercice 3

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. En $\pm\infty$: $\dfrac{3x}{x} = 3$, donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$. En 1, le numérateur tend vers $1 > 0$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ (dénominateur négatif) et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. Asymptotes : $y = 3$ et $x = 1$.
3. $ad - bc = 3 \times (-1) - (-2) \times 1 = -1$, donc $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0$: f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3

4. $3 + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{3x-3+1}{x-1} = f(x)$. Donc $f(x) - 3 = \dfrac{1}{x-1}$: $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite $y = 3$ pour $x > 1$, en dessous pour $x < 1$.
5. $\Omega(1\,;3)$. Si $x \neq 1$, alors $2 - x \neq 1$, et $f(2-x) = 3 + \dfrac{1}{1-x} = 3 - \dfrac{1}{x-1}$. Donc $f(2-x) + f(x) = 6 = 2 \times 3$.
6. $f(x) = 0 \iff 3x - 2 = 0 \iff x = \dfrac{2}{3}$: point $\left(\dfrac{2}{3}\,;0\right)$. $f(0) = 2$: point $(0\,;2)$. Enfin $f(2) = 4$ et $f'(2) = -1$: la tangente a pour équation $y = -(x-2) + 4$, soit $y = -x + 6$.

SenAcad une solution de BarroTech



Asymptotes x = 1 et y = 3, tangente au point d'abscisse 2

Exercice 4

1. La droite $x = -2$ est asymptote verticale : le dénominateur s'annule en -2, donc $-2 + c = 0$ et $c = 2$. En $\pm\infty$, $f(x)$ tend vers $\dfrac{ax}{x} = a$: l'asymptote horizontale est $y = a$, donc $a = 1$. Enfin $A \in \mathcal{C}$ donne $f(0) = \dfrac{b}{2} = 2$, d'où $b = 4$. (On vérifie que le numérateur ne s'annule pas en -2 : $-2 + 4 = 2 \neq 0$.)
2. Avec $a = 1$, $b = 4$, $c = 1$, $d = 2$ (notations de la leçon 2) : $ad - bc = 2 - 4 = -2 \neq 0$, et $f'(x) = \dfrac{-2}{(x+2)^2} < 0$. En -2, le numérateur tend vers 2 : $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$; en $\pm\infty$, f tend vers 1.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

3. Centre de symétrie : $\Omega(-2\,;1)$, intersection des asymptotes. En A : $f'(0) = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$, d'où la tangente $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.
4. On trace les asymptotes, puis on place $A(0\,;2)$, $(-4\,;0)$, $(-3\,;-1)$, $(-1\,;3)$ et $(2\,;1{,}5)$.

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 3 : asymptote oblique

Exercice 5

1. a. $x - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x(x+1)-1}{x+1} = \dfrac{x^2+x-1}{x+1} = f(x)$.
   b. $f(x) - x = -\dfrac{1}{x+1}$, qui tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$: D est asymptote à $\mathcal{C}$ des deux côtés.
   c. $-\dfrac{1}{x+1} > 0 \iff x+1 < 0$: $\mathcal{C}$ est au-dessus de D sur $]-\infty\,;-1[$, en dessous sur $]-1\,;+\infty[$.
   d. En -1, le numérateur tend vers $1-1-1=-1$. À gauche, le dénominateur tend vers 0 en restant négatif : $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$; à droite, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$. La droite $x=-1$ est asymptote verticale.
2. Pour $x \neq 2$: $g(x) - (2x-1) = \dfrac{2x^2-5x+4-(2x-1)(x-2)}{x-2} = \dfrac{2x^2-5x+4-(2x^2-5x+2)}{x-2} = \dfrac{2}{x-2}$, qui tend vers 0 en $\pm\infty$: Δ est asymptote. La courbe de g est au-dessus de Δ pour $x>2$, en dessous pour $x<2$.

Exercice 6

1. a. $ax+b+\dfrac{c}{x-2} = \dfrac{ax^2+(b-2a)x+c-2b}{x-2}$. On identifie avec x^2-x-1 : $a=1$, $b-2a=-1$, $c-2b=-1$, d'où $a=1$, $b=1$, $c=1$: $f(x) = x+1+\dfrac{1}{x-2}$.
   b. $\dfrac{1}{x-2}$ tend vers 0 en $\pm\infty$: $D : y = x+1$ est asymptote oblique. $f(x)-(x+1) = \dfrac{1}{x-2}$: $\mathcal{C}$ est au-dessus de D pour $x>2$, en dessous pour $x<2$.
   c. En 2, le numérateur tend vers $4-2-1=1$: $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$. La droite $x=2$ est asymptote verticale.
   d. Les asymptotes se coupent en $\Omega(2\,;3)$, car $2+1=3$. Si $x\neq2$, alors $4-x\neq2$ et $f(4-x) = 5-x+\dfrac{1}{2-x} = 5-x-\dfrac{1}{x-2}$, donc $f(4-x)+f(x) = 6 = 2\times3$.
2. $x^2+1>0$: h est définie sur $\mathbb{R}$. Le numérateur et le dénominateur ont le même degré : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = \dfrac{2}{1} = 2$, et la droite $y=2$ est asymptote horizontale. $h(x)-2 = \dfrac{2x^2+3-2x^2-2}{x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1} > 0$: la courbe est toujours au-dessus de son asymptote.

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 4 : étude complète d'une fonction rationnelle

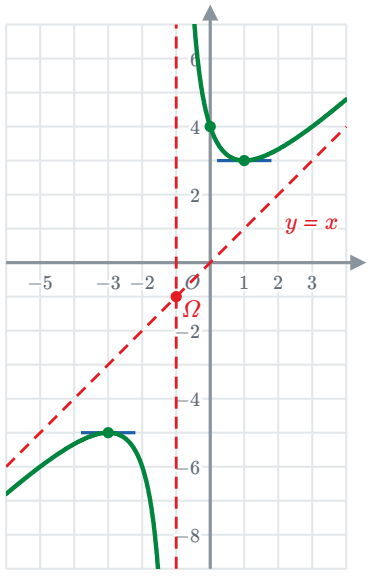
Exercice 7

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, et $x + \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{x^2+x+4}{x+1} = f(x)$.
2. En $\pm\infty$, $\dfrac{x^2}{x} = x$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. En -1, le numérateur tend vers 4 : $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$; la droite $x = -1$ est asymptote verticale. $f(x) - x = \dfrac{4}{x+1}$ tend vers 0 : $D : y = x$ est asymptote oblique ; $\mathcal{C}$ est au-dessus de D pour $x > -1$, en dessous pour $x < -1$.
3. $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x+4)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$. $f(-3) = \dfrac{10}{-2} = -5$ et $f(1) = \dfrac{6}{2} = 3$.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

4. Si $x \neq -1$, alors $-2-x \neq -1$, et $f(-2-x) = -2 - x + \dfrac{4}{-1-x} = -2 - x - \dfrac{4}{x+1}$. Donc $f(-2-x) + f(x) = -2 = 2 \times (-1)$.
5. Le discriminant de x^2+x+4 vaut $1 - 16 = -15 < 0$: pas d'intersection avec l'axe des abscisses. $f(0) = 4$: la courbe coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;4)$.
6. On trace $x = -1$ et $y = x$, on place $(-3\,;-5)$ et $(1\,;3)$ avec leurs tangentes horizontales, $(0\,;4)$, $(-2\,;-6)$, $(3\,;4)$, puis on suit le tableau.

SenAcad, une solution de BarroTech



Asymptotes x = −1 et y = x, centre Ω(−1 ; −1)

Exercice 8

1. $x^2+1>0$ pour tout réel x : $D_f=\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0, et $f(-x)=\dfrac{-4x}{x^2+1}=-f(x)$: f est impaire.
2. Le degré du numérateur est plus petit que celui du dénominateur : $\dfrac{4x}{x^2}=\dfrac{4}{x}$ tend vers 0. Donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$: l'axe des abscisses est asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. $f'(x)=\dfrac{4(x^2+1)-4x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, du signe de $1-x^2$. $f(-1)=-2$, $f(1)=2$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

4. $f(0)=0$ et $f'(0)=4$: $T : y=4x$. Puis $f(x)-4x=\dfrac{4x-4x(x^2+1)}{x^2+1}=\dfrac{-4x^3}{x^2+1}$, du signe de $-x$: $\mathcal{C}$ est au-dessus de T pour $x<0$, en dessous pour $x>0$; elle traverse T en O.
5. On trace l'asymptote $y=0$, T, les points $(-1\,;-2)$ et $(1\,;2)$ avec leurs tangentes horizontales, et $(2\,;1{,}6)$, $(-2\,;-1{,}6)$. La courbe est symétrique par rapport à O.

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 5 : fonctions irrationnelles

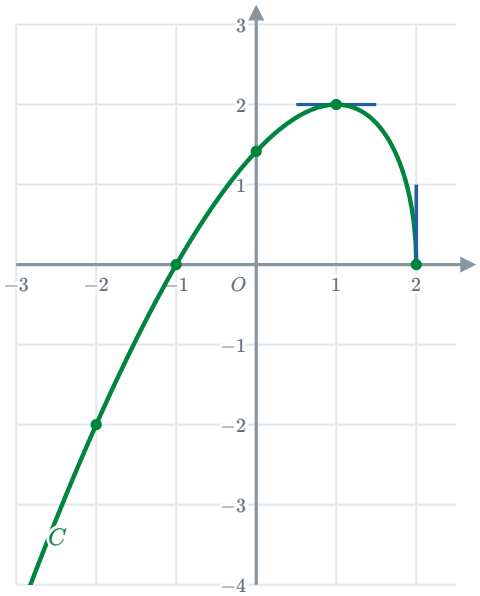
Exercice 9

1. $2-x \geq 0 \iff x \leq 2$: $D_f =]-\infty\,;2]$.
2. Pour $x<2$, $x-2=-(2-x)=-\left(\sqrt{2-x}\right)^2$, donc $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{(x+1)\sqrt{2-x}}{x-2}=-\dfrac{x+1}{\sqrt{2-x}}$.
   Quand x tend vers 2 par la gauche, le numérateur tend vers 3 et $\sqrt{2-x}$ tend vers 0 en restant positif : le taux tend vers $-\infty$. f n'est pas dérivable en 2 ; la courbe a une **demi-tangente verticale** au point $(2\,;0)$.
3. Pour $x<2$, la dérivée de $x \mapsto \sqrt{2-x}$ est $-\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}$ (chapitre 3), donc
$$f'(x)=\sqrt{2-x}-\frac{x+1}{2\sqrt{2-x}}=\frac{2(2-x)-(x+1)}{2\sqrt{2-x}}=\frac{3-3x}{2\sqrt{2-x}}=\frac{3(1-x)}{2\sqrt{2-x}}.$$
4. En $-\infty$, $x+1 \to -\infty$ et $\sqrt{2-x} \to +\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. $f'(x)$ a le signe de $1-x$, et $f(1)=2\times 1=2$.

x	$-\infty$		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

SenAcad, une solution de PapyTech

5. $f(x)=0 \iff x=-1$ ou $x=2$: points $(-1\,;0)$ et $(2\,;0)$. $f(0)=\sqrt{2}\approx 1{,}41$: point $\left(0\,;\sqrt{2}\right)$.
6. On place aussi $(-2\,;-2)$ et le maximum $(1\,;2)$ avec sa tangente horizontale ; la courbe arrive verticalement en $(2\,;0)$.



Demi-tangente verticale en (2 ; 0)

Exercice 10

1. $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}} = \dfrac{x}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, car $\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ pour $x > 0$.
2. En 0 (à droite), le numérateur tend vers 1 et $\sqrt{x}$ vers 0 en restant positif : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. L'axe des ordonnées est asymptote verticale. En $+\infty$, $\sqrt{x} \to +\infty$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \to 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. Avec $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ et $v = \sqrt{x}$: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x} \times x}$. Donc $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$, du signe de $x - 1$. $f(1) = 2$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

4. Le minimum de f sur $]0\,;+\infty[$ est 2 : pour tout $x > 0$, $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}} \geq 2$, donc $x + 1 \geq 2\sqrt{x}$ (on multiplie par $\sqrt{x} > 0$). L'égalité a lieu seulement pour $x = 1$. (Autre preuve : $x + 1 - 2\sqrt{x} = (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$.)
5. $f(4) = \dfrac{5}{2}$ et $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{5/4}{1/2} = \dfrac{5}{2}$. La courbe descend le long de l'axe des ordonnées jusqu'à $(1\,;2)$, puis remonte lentement.

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 6 : fonctions trigonométriques

Exercice 11

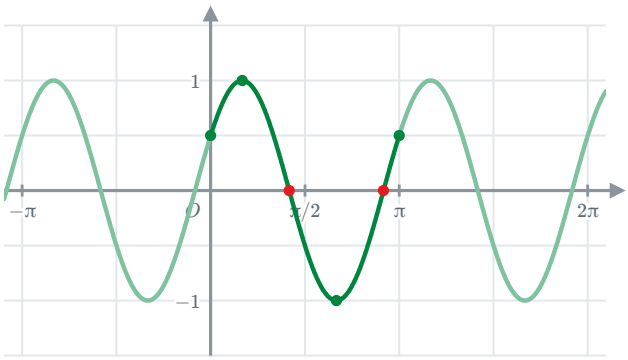
1. Pour tout réel x : $f(x+\pi) = \cos\left(2x + 2\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = f(x)$.
2. Par la règle de $x \mapsto g(ax+b)$: $f'(x) = -2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.
3. Pour $x \in [0\,;\pi]$, $t = 2x - \dfrac{\pi}{3} \in \left[-\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{5\pi}{3}\right]$. On a $\sin t > 0$ pour $t \in]0\,;\pi[$, c'est-à-dire $x \in \left]\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{2\pi}{3}\right[$: là, $f'(x) < 0$. Et $\sin t < 0$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{3}\,;0\right[\cup \left]\pi\,;\dfrac{5\pi}{3}\right]$, c'est-à-dire $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{6}\right[\cup \left]\dfrac{2\pi}{3}\,;\pi\right]$: là, $f'(x) > 0$. Valeurs : $f(0) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos 0 = 1$, $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\pi = -1$, $f(\pi) = \cos\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

4. $\cos t = 0 \iff t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (k entier). Dans $\left[-\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{5\pi}{3}\right]$: $t = \dfrac{\pi}{2}$ ou $t = \dfrac{3\pi}{2}$, d'où $x = \dfrac{t + \frac{\pi}{3}}{2}$: $S = \left\{\dfrac{5\pi}{12}\,;\dfrac{11\pi}{12}\right\}$.

SenAcad, une solution de BarroTech

5. On trace l'arc sur $[0\,;\pi]$, puis ses images par les translations de vecteurs $\pi\vec{i}$ et $-\pi\vec{i}$.

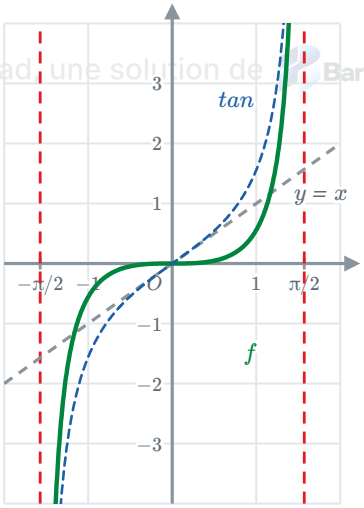


En vert foncé, l'arc étudié sur [0 ; π] ; en rouge, les solutions de f(x) = 0

Exercice 12

1. I est symétrique par rapport à 0, et $f(-x) = \tan(-x) + x = -\tan x + x = -f(x)$: f est impaire.
2. $f'(x) = (1 + \tan^2 x) - 1 = \tan^2 x \geq 0$ sur l'intervalle I : f est croissante sur I (chapitre 3). Elle ne s'annule qu'en 0.
3. Quand x tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ par la gauche, $\tan x \to +\infty$ et $-x \to -\dfrac{\pi}{2}$: $f(x) \to +\infty$. Par imparité, $f(x) \to -\infty$ quand x tend vers $-\dfrac{\pi}{2}$ par la droite. Les droites $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $x = -\dfrac{\pi}{2}$ sont asymptotes verticales.
4. $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$: la tangente à l'origine est l'axe des abscisses ($y = 0$). La courbe la traverse en O.
5. f est croissante sur I, donc pour $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $f(x) \geq f(0) = 0$, c'est-à-dire $\tan x \geq x$. Graphiquement, sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, la courbe de la fonction tangente est au-dessus de la droite $y = x$; elles se touchent en O, où $y = x$ est la tangente à la courbe de tangente.
6.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖



Courbe de f ; en pointillés, la tangente et la droite y = x

S2-S4 Exercice de la leçon 7

Exercice 13

1. Tableau de l'exercice 1 : $+\infty \searrow 0 \nearrow 4 \searrow -\infty$ (minimum local 0 en -1, maximum local 4 en 1). On fait glisser la droite $y = m$:

Valeur de m	$m < 0$	$m = 0$	$0 < m < 4$	$m = 4$	$m > 4$
Nombre de solutions de $f(x) = m$	1	2	3	2	1

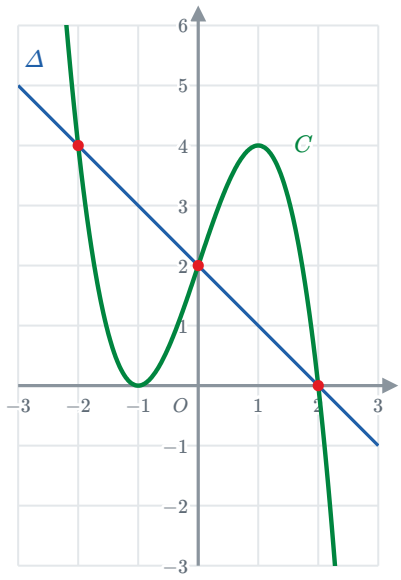
Pour $m = 0$, les solutions sont -1 et 2 (exercice 1, question 4).

2. $-(x-1)^2(x+2) = -(x^2-2x+1)(x+2) = -(x^3-3x+2) = -x^3+3x-2 = f(x)-4$. Donc $f(x) = 4 \iff x = 1$ ou $x = -2$: deux solutions, comme prévu.
3. Δ coupe $\mathcal{C}$ en trois points : $(-2\,;4)$, $(0\,;2)$ et $(2\,;0)$. Donc $f(x) = 2 - x$ a pour solutions -2, 0 et 2. $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ (ou la coupe) pour $x \leq -2$ et pour $0 \leq x \leq 2$: $f(x) \geq 2 - x \iff x \in]-\infty\,;-2] \cup [0\,;2]$.
4. $f(x) - (2-x) = -x^3 + 4x = -x(x^2-4) = -x(x-2)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$-x(x-2)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

SenAcad, une solution de BarroTech

On retrouve exactement la lecture graphique.



C au-dessus de Δ pour x ≤ −2 et pour 0 ≤ x ≤ 2

S1-S3 Exercices de la leçon 8

Exercice 14

1. a. $2x^2$ divisé par x donne $2x$; $2x(x+1) = 2x^2 + 2x$; il reste $x - 1$. Puis x divisé par x donne 1 ; $1 \times (x+1) = x + 1$; il reste -2. Donc $2x^2 + 3x - 1 = (x+1)(2x+1) - 2$ et

$$f(x) = 2x + 1 - \frac{2}{x+1}.$$

Comme $\frac{2}{x+1} \to 0$ en $\pm\infty$, $D : y = 2x + 1$ est asymptote oblique. $f(x) - (2x+1) = -\frac{2}{x+1}$: $\mathcal{C}$ est au-dessus de D pour $x < -1$, en dessous pour $x > -1$.

b. En -1, le numérateur tend vers $2 - 3 - 1 = -2$: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$. La droite $x = -1$ est asymptote verticale.

c. $f'(x) = 2 + \frac{2}{(x+1)^2} > 0$: f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$. En $\pm\infty$, $f(x)$ se comporte comme $2x$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

d. Les asymptotes se coupent en $\Omega(-1\,;-1)$ ($2 \times (-1) + 1 = -1$). $f(-2-x) = -4 - 2x + 1 - \frac{2}{-1-x} = -3 - 2x + \frac{2}{x+1}$, donc $f(-2-x) + f(x) = -2 = 2 \times (-1)$.

SenAcad, une solution de BarcoTech

e. $f(0) = -1$. $f(x) = 0 \iff 2x^2 + 3x - 1 = 0$: $\Delta = 17$, $x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \approx -1{,}78$ ou $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \approx 0{,}28$.

2. x^2 divisé par $2x$ donne $\frac{x}{2}$; $\frac{x}{2}(2x - 2) = x^2 - x$; il reste $3x$. Puis $3x$ divisé par $2x$ donne $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{2}(2x - 2) = 3x - 3$; il reste 3. Donc $h(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2x-2}$, et la droite $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ est asymptote oblique.

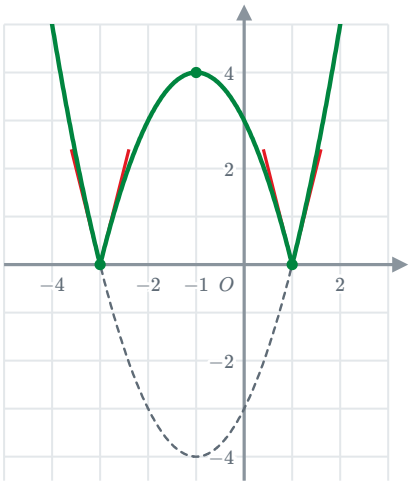
Exercice 15

1. $u(x) = (x+3)(x-1)$. $u'(x) = 2x+2$: u décroît sur $]-\infty\,;-1]$, croît sur $[-1\,;+\infty[$; minimum $u(-1) = -4$. $\mathcal{P}$ est une parabole de sommet $(-1\,;-4)$, qui coupe l'axe des abscisses en -3 et 1, et l'axe des ordonnées en -3.
2. $u(x) \leq 0$ sur $[-3\,;1]$. Donc $f(x) = x^2+2x-3$ sur $]-\infty\,;-3] \cup [1\,;+\infty[$, et $f(x) = -x^2-2x+3$ sur $[-3\,;1]$. Là où $u \leq 0$, $f = -u$ a les variations contraires de celles de u :

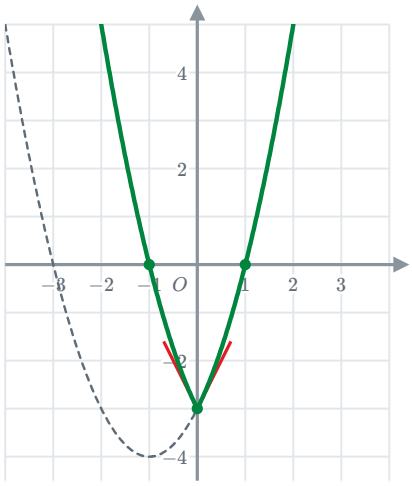
x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. $u(-3) = 0$ et $u'(-3) = -4 \neq 0$: $f'_g(-3) = -4$ et $f'_d(-3) = 4$ (chapitre 3) ; f n'est pas dérivable en -3, et $(-3\,;0)$ est un point anguleux, de demi-tangentes $y = -4(x+3)$ pour $x \leq -3$ et $y = 4(x+3)$ pour $x \geq -3$. De même, $u'(1) = 4$: $f'_g(1) = -4$, $f'_d(1) = 4$, et $(1\,;0)$ est un point anguleux.
4. $u(|x|) = |x|^2 + 2|x| - 3 = x^2 + 2|x| - 3 = g(x)$. g est définie sur $\mathbb{R}$ et $g(-x) = g(x)$: elle est paire. Sur $[0\,;+\infty[$, $g = u$, croissante (car $[0\,;+\infty[\subset [-1\,;+\infty[$) ; par symétrie, g est décroissante sur $]-\infty\,;0]$. Minimum $g(0) = -3$.
5. À droite de 0, $g = u$: $g'_d(0) = u'(0) = 2$. À gauche, $g(x) = u(-x)$, de dérivée $-u'(-x)$: $g'_g(0) = -2$. Les deux nombres sont différents : g n'est pas dérivable en 0, et $(0\,;-3)$ est un point anguleux (où g atteint son minimum).
6. Courbe de f : on retourne vers le haut l'arc de $\mathcal{P}$ situé sous l'axe des abscisses. Courbe de g : on garde la partie de $\mathcal{P}$ située à droite de l'axe des ordonnées, et on la complète par symétrie par rapport à cet axe.

SenAcad, une solution de BarroTech



Courbe de f = |u| (u en pointillés)



Courbe de g (u en pointillés)