Exercices

PREMIÈRE S · CHAPITRE 3 · DÉRIVATION

Exercices classés par leçon, du plus simple au plus complet. Les exercices 1 à 12 sont communs à toutes les séries S. L'exercice 13 est réservé aux séries S2, S4, S2A et S5. L'exercice 14 est réservé aux séries S1, S3 et S1A. Pour les tracés, prends un repère orthonormé d'unité 1 cm, sauf indication contraire. Calculatrice autorisée pour les valeurs approchées. Les corrigés détaillés sont dans la fiche « Corrigés ».

Leçon 1 : nombre dérivé

Exercice 1 : calculer un nombre dérivé par la définition

1. Soit $f(x) = x^2 - 3x$. Pour $h \neq 0$, calculer et simplifier $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$. En déduire que f est dérivable en 2 et donner $f'(2)$.
2. Soit $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$, définie sur $]-1\,;+\infty[$. Pour $x > -1$ et $x \neq 1$, montrer que $\dfrac{g(x) - g(1)}{x-1} = -\dfrac{1}{x+1}$. En déduire $g'(1)$.
3. Soit $k(x) = \sqrt{x+5}$. À l'aide de l'expression conjuguée, montrer que k est dérivable en 4 et calculer $k'(4)$.
4. Soit $m(x) = x^3$. Calculer $m'(-1)$ de deux façons : avec la limite quand x tend vers -1 (on factorisera $x^3 + 1$ par $x + 1$), puis avec la limite quand h tend vers 0. Vérifier que l'on trouve le même nombre.

Exercice 2 : sécantes, dérivabilité et continuité

Soit $f(x) = x^2 + x$, et A le point de sa courbe d'abscisse 1.

1. Calculer $f(1)$. Soit M le point de la courbe d'abscisse $1 + h$, avec $h \neq 0$. Montrer que le coefficient directeur de la droite (AM) est $3 + h$.
2. Recopier et compléter le tableau suivant.

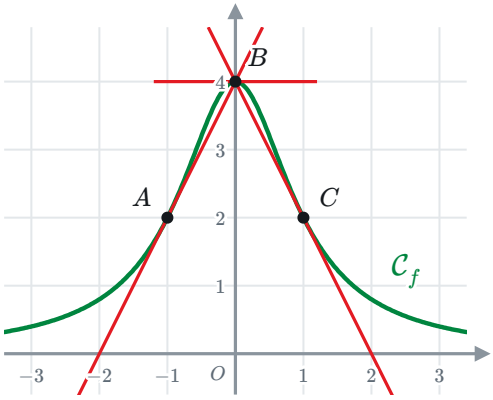
h	1	$0{,}5$	$0{,}1$	$-0{,}1$	$-0{,}01$
coefficient directeur de (AM)					

3. En déduire $f'(1)$.
4. La fonction partie entière E est-elle dérivable en 2 ? Justifier.
5. Soit $u(x) = x\,|x|$. Montrer que, pour $h \neq 0$, $\dfrac{u(h) - u(0)}{h} = |h|$. En déduire que u est dérivable en 0 et donner $u'(0)$.

Leçon 2 : tangente, approximation affine

Exercice 3 : lecture graphique

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous représente une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. On a tracé ses tangentes aux points $A(-1\,;2)$, $B(0\,;4)$ et $C(1\,;2)$. La tangente en A passe par le point $(-2\,;0)$, la tangente en C par le point $(2\,;0)$, et la tangente en B est horizontale.



1. Lire $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$.
2. Lire $f'(-1)$, $f'(0)$ et $f'(1)$, en expliquant la méthode.
3. Donner une équation de chacune des trois tangentes.
4. En utilisant la tangente en C, donner une valeur approchée de $f(1{,}1)$.
5. *(À faire après la leçon 5.)* On admet que $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$. Calculer $f'(x)$, puis vérifier les nombres lus à la question 2. Comparer la valeur approchée de la question 4 avec $f(1{,}1)$.

SénAcad, une solution de Barrolech

Exercice 4 : équations de tangentes, approximation affine

1. Soit $f(x) = x^2 - 2x$. Calculer $f'(3)$ à l'aide de la définition, puis donner une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.
2. Soit $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Calculer $g'(-1)$ à l'aide de la définition, puis donner une équation de la tangente au point d'abscisse -1.
3. Soit $q(x) = x^2 + 2x - 1$. Montrer que $q'(-1) = 0$. Que peut-on dire de la tangente au point d'abscisse -1 ? Donner son équation.
4. a. Montrer, avec la définition, que la fonction cube a pour nombre dérivé 3 en 1. En déduire que $(1+h)^3 \approx 1 + 3h$ pour h proche de 0.
   b. À l'aide des approximations affines en 1, donner sans calculatrice des valeurs approchées de $\sqrt{1{,}04}$, de $\dfrac{1}{0{,}97}$ et de $1{,}01^3$. Comparer avec la calculatrice.

Leçon 3 : nombre dérivé à gauche, nombre dérivé à droite

Exercice 5 : dérivable ou point anguleux ?

Dans chaque cas, étudier la dérivabilité de la fonction au point indiqué (on calculera les nombres dérivés à gauche et à droite). Si la fonction n'y est pas dérivable, donner une équation de chaque demi-tangente.

1. $f(x) = |x - 2|$, en 2.
2. $g(x) = x^2 + 1$ si $x \leq 1$, et $g(x) = 4x - 2$ si $x > 1$, en 1.
3. $h(x) = x^2$ si $x \leq 2$, et $h(x) = 4x - 4$ si $x > 2$, en 2.
4. $k(x) = \sqrt{x - 1}$, en 1 (à droite). Que peut-on dire de la courbe au point $(1\,;0)$?

Exercice 6 : choisir les paramètres

Soit a et b deux réels, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx \ \text{ si } x \leq 1, \qquad f(x) = \frac{1}{x} \ \text{ si } x > 1.$$

1. Montrer que f est continue en 1 si et seulement si $a + b = 1$.
2. On suppose $a + b = 1$. Calculer le nombre dérivé à droite $f'_d(1)$, puis le nombre dérivé à gauche $f'_g(1)$ en fonction de a et b.
3. En déduire les valeurs de a et b pour lesquelles f est dérivable en 1. Donner alors $f'(1)$ et une équation de la tangente au point d'abscisse 1.

Généré par une version de BarroTech

Leçon 4 : fonction dérivée, dérivées usuelles

Exercice 7 : dérivées des fonctions usuelles

1. Donner la fonction dérivée et l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions :
   $f_1(x) = x^7$; $f_2(x) = -4x$; $f_3(x) = 5$; $f_4(x) = \sqrt{x}$; $f_5(x) = \dfrac{1}{x}$; $f_6(x) = \cos x$.
2. Montrer, avec la définition, que la fonction $x \mapsto x^4$ a pour dérivée $x \mapsto 4x^3$.
3. Donner une équation de la tangente à la courbe de la racine carrée au point d'abscisse $\dfrac{1}{4}$.
4. En quel point la courbe de la racine carrée a-t-elle une tangente de coefficient directeur $\dfrac{1}{4}$?
5. En quels points la courbe de la fonction inverse a-t-elle une tangente de coefficient directeur -4 ?
6. Donner une équation de la tangente à la courbe du sinus au point d'abscisse π.

Leçon 5 : règles de calcul

Exercice 8 : somme, produit, quotient

Pour chaque fonction, préciser sur quel(s) intervalle(s) elle est dérivable, puis calculer sa dérivée et la simplifier.

a. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$; b. $g(x) = (x^2+1)(3x-2)$; c. $h(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$; d. $k(x) = x^2\sqrt{x}$;
e. $\ell(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$; f. $m(x) = x\cos x$; g. $n(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$; h. $p(x) = \dfrac{4}{x^3}$.

Exercice 9 : fonctions de $ax+b$, tangentes horizontales

1. Calculer la dérivée de chacune des fonctions, en précisant où elle est dérivable :
   a. $(3x-1)^4$; b. $\sqrt{2x+6}$; c. $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; d. $\dfrac{1}{1-3x}$; e. $\sin(\pi x)$.
2. Donner une équation de la tangente à la courbe de $x \mapsto \sqrt{2x+6}$ au point d'abscisse 5.
3. Soit $g(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$. Calculer $g'(x)$ et l'écrire sous forme factorisée. En quels points la courbe de g a-t-elle une tangente horizontale ?

Leçon 6 : dérivée et sens de variation

Exercice 10 : étudier les variations

Pour chaque fonction : calculer la dérivée, étudier son signe, dresser le tableau de variations (avec les limites aux bornes ouvertes de l'ensemble de définition) et donner les extremums locaux.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = x + \dfrac{4}{x}$ sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.
3. $k(x) = -x^4 + 2x^2$ sur $\mathbb{R}$.
4. $m(x) = x - 2\sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$ (dérivable sur $]0\,;+\infty[$).
5. $s(x) = 2\sin x - x$ sur $[0\,;\pi]$. Donner la valeur exacte du maximum, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Leçon 7 : bijection, équations, optimisation

Exercice 11 : équations

1. Soit $f(x) = x^3 + 3x - 5$.
   a. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ (avec ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$).
   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.
   c. Montrer que $1 < \alpha < 2$, puis donner un encadrement de α d'amplitude $0{,}1$.
   d. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x, puis l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^3 + 3x - 5 > 0$.
2. Soit $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Dresser le tableau de variations de g, puis montrer que l'équation $g(x) = 0$ a exactement trois solutions. Donner pour chacune un intervalle d'amplitude 1 qui la contient.

Exercice 12 : optimisation

1. **Le champ au bord du fleuve.** Un cultivateur veut clôturer un champ rectangulaire de 800 m² au bord d'un fleuve. Le côté qui longe le fleuve n'a pas besoin de clôture. On note x la longueur (en m) de chacun des deux côtés perpendiculaires au fleuve.
   a. Exprimer la longueur de l'autre côté, puis la longueur totale de clôture $L(x)$, pour $x > 0$.
   b. Étudier les variations de L sur $]0\,;+\infty[$.
   c. Quelles dimensions faut-il choisir pour utiliser le moins de clôture possible ? Quelle longueur de clôture faut-il alors ?
SenAcad, une solution de BarroTech
2. **Le point le plus proche.** Dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ et $A(3\,;0)$. Pour un point $M(x\,;x^2)$ de $\mathcal{P}$, on pose $D(x) = AM^2$.
   a. Montrer que $D(x) = x^4 + x^2 - 6x + 9$.
   b. Montrer que $D'(x) = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 3)$, puis étudier le signe de $D'(x)$.
   c. En déduire le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A, et la distance minimale AM.

S2-S4 Exercice de la leçon 8

Exercice 13 : vitesse et coût marginal

Partie A : un mobile sur une droite. Un mobile se déplace sur un axe. Sa position (en m) à l'instant t (en s) est $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, pour $t \in [0\,;5]$.

1. Calculer sa vitesse moyenne entre les instants 0 et 2.
2. Calculer sa vitesse instantanée $v(t)$ et la factoriser.
3. Calculer $v(0)$ et $v(2)$. Que signifie le signe de $v(2)$?
4. À quels instants le mobile s'arrête-t-il ? Quelles sont alors ses positions ?
5. Dresser le tableau de variations de la position x sur $[0\,;5]$.

Partie B : coût marginal et coût moyen. Une coopérative fabrique q objets, avec $1 \leq q \leq 100$. Le coût total, en milliers de francs CFA, est $C(q) = 0{,}5\,q^2 + 20q + 800$ (modèle simplifié).

1. Calculer le coût marginal $C'(q)$, puis $C'(40)$. Comparer avec $C(41) - C(40)$.
2. Le coût moyen d'un objet est $M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$. Montrer que $M(q) = 0{,}5\,q + 20 + \dfrac{800}{q}$, puis étudier ses variations sur $[1\,;100]$.
3. Pour quelle production le coût moyen est-il minimal ? Vérifier que, pour cette production, le coût moyen est égal au coût marginal.

SenAcad, une solution de BarroTech

S1-S3 Exercice de la leçon 9

Exercice 14 : dérivabilité de $x \mapsto |g(x)|$

1. Soit $f(x) = |x^2 - 4|$.
   a. Écrire $f(x)$ sans valeur absolue sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-2]$, $[-2\,;2]$ et $[2\,;+\infty[$.
   b. Calculer $f'(x)$ là où f est dérivable.
   c. Étudier la dérivabilité de f en 2 et en -2. Donner une équation de chaque demi-tangente au point $(2\,;0)$.
2. Soit $g(x) = |x^3 - 3x^2|$. Étudier la dérivabilité de g en 0 et en 3.
3. Soit $h(x) = |\cos x|$. Étudier la dérivabilité de h en $\dfrac{\pi}{2}$.
4. Soit $k(x) = (x-1)\,|x-1|$. La fonction k est-elle dérivable en 1 ?

SenAcad, une solution de BarroTech