Corrigés détaillés

PREMIÈRE S · CHAPITRE 3 · DÉRIVATION

Corrigés détaillés des exercices d'application. Tous les résultats ont été vérifiés par calcul exact, et recoupés par un calcul numérique indépendant. L'exercice 13 est réservé aux séries S2-S4, l'exercice 14 aux séries S1-S3.

Leçon 1 : nombre dérivé

Exercice 1

1. $f(2) = 4 - 6 = -2$ et $f(2+h) = 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h = -2 + h + h^2$. Donc $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{h + h^2}{h} = 1 + h$, qui tend vers 1 quand h tend vers 0. f est dérivable en 2 et $f'(2) = 1$.
2. $g(1) = 1$. Pour $x > -1$, $x \neq 1$: $g(x) - g(1) = \dfrac{2 - (x+1)}{x+1} = \dfrac{1-x}{x+1}$, donc $\dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \dfrac{-(x-1)}{(x+1)(x-1)} = -\dfrac{1}{x+1}$. Quand x tend vers 1, ce taux tend vers $-\dfrac{1}{2}$: $g'(1) = -\dfrac{1}{2}$.
3. $k(4) = 3$. Pour $h \neq 0$ (et $h \geq -9$) :

$$\frac{\sqrt{9+h} - 3}{h} = \frac{(9+h) - 9}{h\left(\sqrt{9+h} + 3\right)} = \frac{1}{\sqrt{9+h} + 3},$$

qui tend vers $\dfrac{1}{3+3} = \dfrac{1}{6}$. Donc k est dérivable en 4 et $k'(4) = \dfrac{1}{6}$.

SenAcad, une solution de BarrTech

4. Avec x : $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$, donc pour $x \neq -1$, $\dfrac{m(x) - m(-1)}{x - (-1)} = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1} = x^2 - x + 1$, qui tend vers $1 + 1 + 1 = 3$.
   Avec h : $(-1+h)^3 = -1 + 3h - 3h^2 + h^3$, donc $\dfrac{m(-1+h) - m(-1)}{h} = \dfrac{3h - 3h^2 + h^3}{h} = 3 - 3h + h^2$, qui tend vers 3.
   Les deux écritures donnent $m'(-1) = 3$.

Exercice 2

1. $f(1) = 2$. Le coefficient directeur de (AM) est
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1 + 2h + h^2) + (1 + h) - 2}{h} = \frac{3h + h^2}{h} = 3 + h.$$
2.

h	1	$0{,}5$	$0{,}1$	$-0{,}1$	$-0{,}01$
coefficient directeur de (AM)	4	$3{,}5$	$3{,}1$	$2{,}9$	$2{,}99$

3. Quand h tend vers 0, $3 + h$ tend vers 3 : $f'(1) = 3$.
4. Non. La partie entière n'est pas continue en 2 : sa limite à gauche en 2 vaut 1, et sa limite à droite vaut 2. Or une fonction dérivable en un point y est continue. Donc E n'est pas dérivable en 2.
5. $u(0) = 0$ et $u(h) = h\,|h|$, donc $\dfrac{u(h) - u(0)}{h} = \dfrac{h\,|h|}{h} = |h|$, qui tend vers 0 quand h tend vers 0 (des deux côtés). Donc u est dérivable en 0 et $u'(0) = 0$.

Leçon 2 : tangente, approximation affine

Exercice 3

1. On lit les ordonnées des points : $f(-1) = 2$, $f(0) = 4$, $f(1) = 2$.
2. Le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente.
   - La tangente en A passe par $A(-1\,;2)$ et $(-2\,;0)$: $f'(-1) = \dfrac{2 - 0}{-1 - (-2)} = 2$.
   - La tangente en B est horizontale : $f'(0) = 0$.
   - La tangente en C passe par $C(1\,;2)$ et $(2\,;0)$: $f'(1) = \dfrac{0 - 2}{2 - 1} = -2$.
3. En A : $y = 2(x + 1) + 2 = 2x + 4$. En B : $y = 4$. En C : $y = -2(x - 1) + 2 = -2x + 4$.
4. $f(1 + h) \approx f(1) + f'(1)\,h = 2 - 2h$. Avec $h = 0{,}1$: $f(1{,}1) \approx 1{,}8$.
5. Avec $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ et $v(x) = x^2 + 1$: $f'(x) = 4 \times \left(-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\right) = -\dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$. Donc $f'(-1) = \dfrac{8}{4} = 2$, $f'(0) = 0$ et $f'(1) = -\dfrac{8}{4} = -2$: ce sont bien les nombres lus. Enfin $f(1{,}1) = \dfrac{4}{2{,}21} \approx 1{,}810$: l'approximation $1{,}8$ est correcte à 10^{-2} près.

Exercice 4

1. $f(3)=3$. Pour $h\neq 0$: $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\dfrac{(9+6h+h^2)-(6+2h)-3}{h}=\dfrac{4h+h^2}{h}=4+h$, qui tend vers 4. Donc $f'(3)=4$, et la tangente a pour équation $y=4(x-3)+3$, soit $y=4x-9$.
2. $g(-1)=-1$. Pour $h\neq 0$ et $h\neq 1$: $g(-1+h)-g(-1)=\dfrac{1}{h-1}+1=\dfrac{h}{h-1}$, donc le taux vaut $\dfrac{1}{h-1}$, qui tend vers -1. Donc $g'(-1)=-1$, et la tangente a pour équation $y=-(x+1)-1$, soit $y=-x-2$.
3. $q(-1)=1-2-1=-2$. Pour $h\neq 0$: $q(-1+h)=1-2h+h^2-2+2h-1=-2+h^2$, donc le taux vaut $\dfrac{h^2}{h}=h$, qui tend vers 0 : $q'(-1)=0$. La tangente au point d'abscisse -1 est **horizontale** : c'est la droite $y=-2$ (au sommet de la parabole).
4. a. $\dfrac{(1+h)^3-1}{h}=\dfrac{3h+3h^2+h^3}{h}=3+3h+h^2$, qui tend vers 3. Donc le nombre dérivé de la fonction cube en 1 vaut 3, et $(1+h)^3\approx 1+3h$ pour h proche de 0.
   b. $\sqrt{1{,}04}=\sqrt{1+0{,}04}\approx 1+0{,}02=1{,}02$ (calculatrice : $1{,}019\,80\ldots$).
   $\dfrac{1}{0{,}97}=\dfrac{1}{1+(-0{,}03)}\approx 1+0{,}03=1{,}03$ (calculatrice : $1{,}030\,93\ldots$).
   $1{,}01^3\approx 1+0{,}03=1{,}03$ (valeur exacte : $1{,}030\,301$).

Leçon 3 : nombre dérivé à gauche, nombre dérivé à droite

Exercice 5

SenAcad, une solution de BarroTech

1. $f(2)=0$ et, pour $h\neq 0$, $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{|h|}{h}$, qui vaut 1 si $h>0$ et -1 si $h<0$. Donc $f'_d(2)=1$ et $f'_g(2)=-1$: f n'est pas dérivable en 2, le point $(2\,;0)$ est un point anguleux. Demi-tangentes : $y=x-2$ pour $x\geq 2$, et $y=-x+2$ pour $x\leq 2$.
2. $g(1)=2$ (et la limite à droite vaut $4-2=2$: g est continue en 1).
   - À gauche : $\dfrac{x^2+1-2}{x-1}=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$, qui tend vers 2 : $g'_g(1)=2$.
   - À droite : $\dfrac{4x-2-2}{x-1}=\dfrac{4(x-1)}{x-1}=4$: $g'_d(1)=4$.

   Les nombres sont différents : g n'est pas dérivable en 1, et $(1\,;2)$ est un point anguleux. Demi-tangentes : $y=2(x-1)+2=2x$ pour $x\leq 1$, et $y=4(x-1)+2=4x-2$ pour $x\geq 1$.
3. $h(2)=4$ (et la limite à droite vaut $8-4=4$).
   - À gauche : $\dfrac{x^2-4}{x-2}=x+2$, qui tend vers 4 : $h'_g(2)=4$.
   - À droite : $\dfrac{4x-4-4}{x-2}=4$: $h'_d(2)=4$.

   Les deux nombres sont égaux : h est dérivable en 2 et $h'(2)=4$. La tangente a pour équation $y=4(x-2)+4=4x-4$: le second morceau est porté par la tangente.
4. $k(1)=0$. Pour $h>0$: $\dfrac{k(1+h)-k(1)}{h}=\dfrac{\sqrt{h}}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$, qui tend vers $+\infty$. Ce n'est pas une limite finie : k n'est pas dérivable à droite en 1. La courbe admet au point $(1\,;0)$ une **demi-tangente verticale**.

Exercice 6

1. $f(1) = a + b$. Quand x tend vers 1 par la gauche, $ax^2 + bx$ tend vers $a + b$; par la droite, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 1. Donc f est continue en 1 si et seulement si $a + b = 1$.
2. Avec $a + b = 1$, on a $f(1) = 1$.
   - À droite : $\dfrac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \dfrac{1 - x}{x(x-1)} = -\dfrac{1}{x}$, qui tend vers -1 : $f'_d(1) = -1$.
   - À gauche : $\dfrac{ax^2 + bx - (a+b)}{x - 1} = \dfrac{a(x^2-1) + b(x-1)}{x-1} = a(x+1) + b$, qui tend vers $2a + b$: $f'_g(1) = 2a + b$.
3. f est dérivable en 1 si et seulement si elle y est continue et $f'_g(1) = f'_d(1)$: $a + b = 1$ et $2a + b = -1$. En soustrayant, $a = -2$, puis $b = 3$. Alors $f(x) = -2x^2 + 3x$ pour $x \leq 1$, $f'(1) = -1$, et la tangente au point $(1\,;1)$ a pour équation $y = -(x-1) + 1$, soit $y = -x + 2$.

Leçon 4 : fonction dérivée, dérivées usuelles

Exercice 7

1. $f'_1(x) = 7x^6$ sur $\mathbb{R}$; $f'_2(x) = -4$ sur $\mathbb{R}$; $f'_3(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$; $f'_4(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$; $f'_5(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$; $f'_6(x) = -\sin x$ sur $\mathbb{R}$.
2. $(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$, donc
$$\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3,$$
qui tend vers $4x^3$ quand h tend vers 0.
3. $\sqrt{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$ et la dérivée en $\dfrac{1}{4}$ vaut $\dfrac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = 1$. La tangente a pour équation $y = \left(x - \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{2}$, soit $y = x + \dfrac{1}{4}$.
4. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{4} \iff \sqrt{x} = 2 \iff x = 4$. C'est le point $(4\,;2)$.
5. $-\dfrac{1}{x^2} = -4 \iff x^2 = \dfrac{1}{4} \iff x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$. Ce sont les points $\left(\dfrac{1}{2}\,;2\right)$ et $\left(-\dfrac{1}{2}\,;-2\right)$.
6. $\sin \pi = 0$ et $\sin'(\pi) = \cos \pi = -1$. La tangente a pour équation $y = -(x - \pi)$, soit $y = -x + \pi$.

Sea Ace une solution de BarroTech

Leçon 5 : règles de calcul

Exercice 8

a. Polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 6x^2 - 10x + 4$.

b. Sur $\mathbb{R}$, par la règle du produit : $g'(x) = 2x(3x-2) + 3(x^2+1) = 9x^2 - 4x + 3$.

c. Sur $]-\infty\,;-3[$ et sur $]-3\,;+\infty[$: $h'(x) = \dfrac{2(x+3)-(2x-1)}{(x+3)^2} = \dfrac{7}{(x+3)^2}$.

d. Sur $]0\,;+\infty[$: $k'(x) = 2x\sqrt{x} + x^2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \dfrac{x\sqrt{x}}{2} = \dfrac{5}{2}\,x\sqrt{x}$ (car $\dfrac{x^2}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x}$).

e. Sur $]-\infty\,;-2[$, $]-2\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$: $\ell'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2-4)^2}$.

f. Sur $\mathbb{R}$: $m'(x) = \cos x - x\sin x$.

g. Sur $]0\,;+\infty[$: $n'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

h. $p(x) = 4 \times \dfrac{1}{x^3}$, sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$: $p'(x) = 4 \times \left(-\dfrac{3}{x^4}\right) = -\dfrac{12}{x^4}$.

Exercice 9

1. a. Sur $\mathbb{R}$: $3 \times 4(3x-1)^3 = 12(3x-1)^3$.

   b. Pour $2x+6 > 0$, soit sur $]-3\,;+\infty[$: $2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{2x+6}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+6}}$.

   c. Sur $\mathbb{R}$: $2 \times \left(-\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)\right) = -2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

   d. Sur $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right[$ et sur $\left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$: $-3 \times \left(-\dfrac{1}{(1-3x)^2}\right) = \dfrac{3}{(1-3x)^2}$.

   e. Sur $\mathbb{R}$: $\pi\cos(\pi x)$.

SenAcad, une solution de BarroTech

2. Au point d'abscisse 5 : $\sqrt{16} = 4$ et la dérivée vaut $\dfrac{1}{\sqrt{16}} = \dfrac{1}{4}$. La tangente a pour équation $y = \dfrac{1}{4}(x-5) + 4$, soit $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{11}{4}$.

3. Sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]2\,;+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{2x(x-2)-(x^2-3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}.$$

   La tangente est horizontale quand $g'(x) = 0$, c'est-à-dire en $x = 1$ et $x = 3$. Comme $g(1) = \dfrac{-2}{-1} = 2$ et $g(3) = \dfrac{6}{1} = 6$, ce sont les points $(1\,;2)$ et $(3\,;6)$.

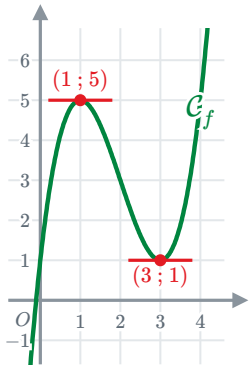
Leçon 6 : dérivée et sens de variation

Exercice 10

1. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$: positive à l'extérieur de $[1\,;3]$, négative entre 1 et 3. $f(1) = 5$, $f(3) = 1$; limites $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Maximum local 5 en 1, minimum local 1 en 3.



2. $g'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{x^2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$: du signe de $(x-2)(x+2)$. $g(-2) = -4$, $g(2) = 4$. Limites : $-\infty$ en $-\infty$; en 0, $-\infty$ à gauche et $+\infty$ à droite ; $+\infty$ en $+\infty$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Sem... une solution de ...arroTech

Maximum local -4 en -2, minimum local 4 en 2.

3. $k'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x-1)(x+1)$. Signe : $+$ sur $]-\infty\,;-1[$, $-$ sur $]-1\,;0[$, $+$ sur $]0\,;1[$, $-$ sur $]1\,;+\infty[$. $k(-1) = k(1) = 1$, $k(0) = 0$; limites $-\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
k	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

Maximum 1 en -1 et en 1, minimum local 0 en 0.

4. Sur $]0\,;+\infty[$: $m'(x) = 1 - \dfrac{2}{2\sqrt{x}} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$, du signe de $\sqrt{x} - 1$: négative sur $]0\,;1[$, positive sur $]1\,;+\infty[$. $m(0) = 0$, $m(1) = -1$, et $m(x) = \sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 2)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

x	0		1		$+\infty$
$m'(x)$		$-$	0	$+$	
m	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Minimum -1 en 1.

5. $s'(x) = 2\cos x - 1$. Sur $[0\,;\pi]$, $\cos x = \dfrac{1}{2} \iff x = \dfrac{\pi}{3}$, et $\cos x > \dfrac{1}{2}$ pour $0 \leq x < \dfrac{\pi}{3}$ (cercle trigonométrique). Donc $s' > 0$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{3}\right[$ et $s' < 0$ sur $\left]\dfrac{\pi}{3}\,;\pi\right]$. $s(0) = 0$, $s(\pi) = -\pi$.

x	0		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$s'(x)$		$+$	0	$-$	
s	0	↗	$\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$	↘	$-\pi$

Maximum $s\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3} \approx 0{,}68$.

Leçon 7 : bijection, équations, optimisation

Exercice 11

1. a. $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ pour tout x : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (terme de plus haut degré).
   b. f est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$: c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]-\infty\,;+\infty[= \mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α.
   c. $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 9 > 0$; f étant croissante, $1 < \alpha < 2$. Puis $f(1{,}1) = 1{,}331 + 3{,}3 - 5 = -0{,}369 < 0$ et $f(1{,}2) = 1{,}728 + 3{,}6 - 5 = 0{,}328 > 0$: $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$.
   d. f est strictement croissante et $f(\alpha) = 0$: $f(x) < 0$ pour $x < \alpha$, et $f(x) > 0$ pour $x > \alpha$. L'ensemble des solutions de $x^3 + 3x - 5 > 0$ est $]\alpha\,;+\infty[$.
2. $g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$: positive sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]2\,;+\infty[$, négative sur $]0\,;2[$. $g(0) = 1$ et $g(2) = 8 - 12 + 1 = -3$; limites $-\infty$ en $-\infty$, $+\infty$ en $+\infty$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

- Sur $]-\infty\,;0]$, g est strictement croissante, bijection sur $]-\infty\,;1]$, qui contient 0 : une seule solution. Comme $g(-1) = -3 < 0 < g(0) = 1$, elle est dans $]-1\,;0[$.
- Sur $[0\,;2]$, g est strictement décroissante, bijection sur $[-3\,;1]$, qui contient 0 : une seule solution. Comme $g(1) = -1 < 0$, elle est dans $]0\,;1[$.
- Sur $[2\,;+\infty[$, g est strictement croissante, bijection sur $[-3\,;+\infty[$: une seule solution. Comme $g(3) = 1 > 0$, elle est dans $]2\,;3[$.

L'équation $g(x) = 0$ a donc exactement trois solutions.

Exercice 12

1. a. L'aire vaut 800 m², donc l'autre côté mesure $\dfrac{800}{x}$ m. La clôture comprend les deux côtés de longueur x et un côté de longueur $\dfrac{800}{x}$: $L(x) = 2x + \dfrac{800}{x}$.
   b. $L'(x) = 2 - \dfrac{800}{x^2} = \dfrac{2(x^2-400)}{x^2} = \dfrac{2(x-20)(x+20)}{x^2}$. Sur $]0\,;+\infty[$, $L'(x)$ a le signe de $x - 20$: L est strictement décroissante sur $]0\,;20]$ et strictement croissante sur $[20\,;+\infty[$.
   c. L est minimale pour $x = 20$: le champ mesure 20 m sur $\dfrac{800}{20} = 40$ m (le côté de 40 m le long du fleuve), et il faut $L(20) = 40 + 40 = 80$ m de clôture.
2. a. $AM^2 = (x-3)^2 + (x^2-0)^2 = x^2 - 6x + 9 + x^4$, donc $D(x) = x^4 + x^2 - 6x + 9$.
   b. $D'(x) = 4x^3 + 2x - 6$. Et $2(x-1)(2x^2+2x+3) = 2(2x^3 + 2x^2 + 3x - 2x^2 - 2x - 3) = 2(2x^3 + x - 3) = 4x^3 + 2x - 6$. Le trinôme $2x^2 + 2x + 3$ a pour discriminant $4 - 24 = -20 < 0$: il est toujours strictement positif. Donc $D'(x)$ a le signe de $x - 1$.
   c. D est décroissante sur $]-\infty\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$: son minimum est $D(1) = 1 + 1 - 6 + 9 = 5$. Le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A est $M(1\,;1)$, et la distance minimale est $AM = \sqrt{5}$.

S2-S4 Exercice de la leçon 8

Exercice 13

Partie A.

1. $x(0) = 0$ et $x(2) = 8 - 24 + 18 = 2$. Vitesse moyenne : $\dfrac{x(2) - x(0)}{2} = 1$ m/s.
2. $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t - 1)(t - 3)$.
3. $v(0) = 9$ m/s et $v(2) = 12 - 24 + 9 = -3$ m/s. À l'instant 2, la vitesse est négative : la position diminue, le mobile recule.
4. Le mobile s'arrête quand $v(t) = 0$: à $t = 1$ s et $t = 3$ s. Ses positions sont alors $x(1) = 4$ m et $x(3) = 0$ m.
5. v est positive sur $[0\,;1[$ et sur $]3\,;5]$, négative sur $]1\,;3[$. De plus $x(5) = 125 - 150 + 45 = 20$.

t	0		1		3		5
$v(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	20

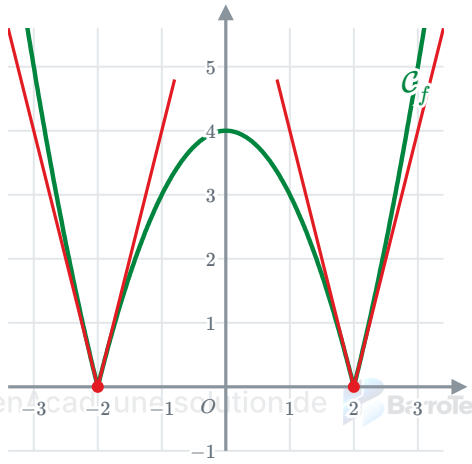
Partie B.

1. $C'(q) = q + 20$, donc $C'(40) = 60$ (soit $60\,000$ F). Et $C(41) - C(40) = 2\,460{,}5 - 2\,400 = 60{,}5$: le quarante et unième objet coûte environ $60\,000$ F, comme l'annonce le coût marginal.
2. $M(q) = \dfrac{0{,}5\,q^2 + 20q + 800}{q} = 0{,}5\,q + 20 + \dfrac{800}{q}$. Puis $M'(q) = 0{,}5 - \dfrac{800}{q^2} = \dfrac{q^2 - 1\,600}{2q^2} = \dfrac{(q - 40)(q + 40)}{2q^2}$, du signe de $q - 40$ sur $[1\,;100]$: M est décroissante sur $[1\,;40]$ et croissante sur $[40\,;100]$.
3. Le coût moyen est minimal pour $q = 40$ objets : $M(40) = 20 + 20 + 20 = 60$, soit $60\,000$ F par objet. C'est bien la valeur du coût marginal $C'(40) = 60$.

S1-S3 Exercice de la leçon 9

Exercice 14

1. a. $x^2-4\geq 0$ pour $x\leq -2$ ou $x\geq 2$: sur $]-\infty\,;-2]$ et sur $[2\,;+\infty[$, $f(x)=x^2-4$. Sur $[-2\,;2]$, $f(x)=4-x^2$.
   b. $f'(x)=2x$ sur $]-\infty\,;-2[$ et sur $]2\,;+\infty[$; $f'(x)=-2x$ sur $]-2\,;2[$.
   c. En 2 : à droite, $\dfrac{x^2-4}{x-2}=x+2$ tend vers 4 ; à gauche, $\dfrac{4-x^2}{x-2}=-(x+2)$ tend vers -4. Donc $f'_d(2)=4$ et $f'_g(2)=-4$: f n'est pas dérivable en 2, point anguleux. (Règle : $g'(2)=4$, et $\pm|g'(2)|=\pm 4$.) En -2 : $f'_g(-2)=-4$ et $f'_d(-2)=4$: point anguleux. Demi-tangentes en $(2\,;0)$: $y=4x-8$ pour $x\geq 2$, et $y=-4x+8$ pour $x\leq 2$.



Exercice 14.1 : points anguleux en −2 et en 2

2. Ici $u(x)=x^3-3x^2=x^2(x-3)$ s'annule en 0 et en 3, et $u'(x)=3x^2-6x$.
   - En 0 : $u'(0)=0$, donc g est dérivable en 0 et $g'(0)=0$ (tangente horizontale).
   - En 3 : $u'(3)=27-18=9\neq 0$, donc $g'_g(3)=-9$ et $g'_d(3)=9$: g n'est pas dérivable en 3, point anguleux.
3. $\cos\dfrac{\pi}{2}=0$ et $\cos'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{2}=-1\neq 0$. Donc $h'_g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ et $h'_d\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$: h n'est pas dérivable en $\dfrac{\pi}{2}$, point anguleux. (Directement : à droite de $\dfrac{\pi}{2}$, $\cos x<0$ et $h(x)=-\cos x$, de dérivée $\sin x$, qui vaut 1 en $\dfrac{\pi}{2}$.)
4. $k(1)=0$ et, pour $h\neq 0$, $\dfrac{k(1+h)-k(1)}{h}=\dfrac{h\,|h|}{h}=|h|$, qui tend vers 0. Donc k est dérivable en 1 et $k'(1)=0$.