Exercices

PREMIÈRE S · CHAPITRE 2 · LIMITES ET CONTINUITÉ

Exercices classés par leçon, du plus simple au plus complet. Les exercices 1 à 11 concernent toutes les séries S. L'exercice 12 est réservé aux séries S2, S4, S2A et S5. Les exercices 13 et 14 sont réservés aux séries S1, S3 et S1A. Calculatrice non nécessaire. Les corrigés détaillés sont dans la fiche « Corrigés ».

Leçon 1 : la limite d'une fonction en un point

Exercice 1 : du tableau de valeurs à la limite

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant.

x	$2{,}9$	$2{,}99$	$3{,}01$	$3{,}1$
$f(x)$				

2. Quelle limite peut-on conjecturer pour f en 3 ?
3. Montrer que, pour tout $x \neq 3$, $f(x) = x + 3$. En déduire $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.
4. Calculer les limites suivantes (les fonctions sont définies au point considéré).
   a. $\lim\limits_{x \to -2} \left(x^3 + 2x^2 - x + 4\right)$ b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x - 1}{x^2 + 1}$ c. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x}$ d. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 2}$

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 2 : factoriser pour simplifier

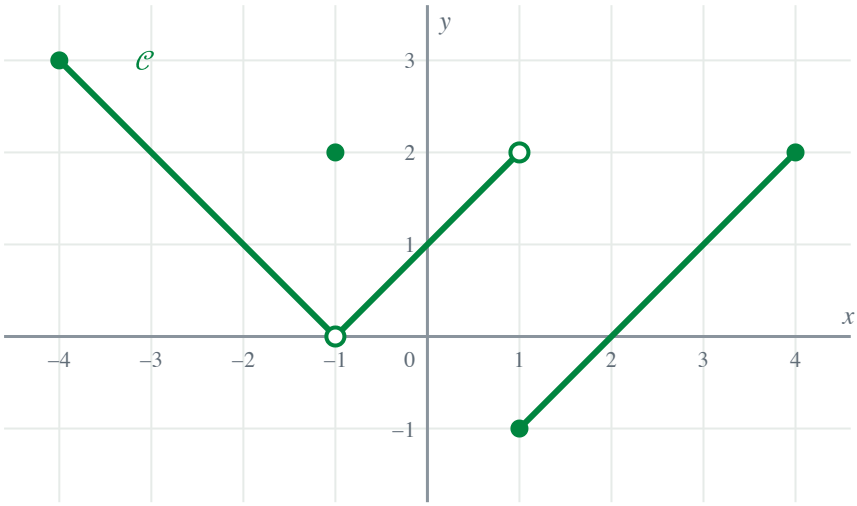
Dans chaque cas, la fonction n'est pas définie au point considéré. Factoriser le numérateur, simplifier, puis calculer la limite.

a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$ b. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ c. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$ d. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 5x}{x}$

Leçon 2 : limite à gauche, limite à droite

Exercice 3 : lecture graphique et fonctions définies par morceaux

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie sur $[-4\,;4]$. Un point plein appartient à la courbe ; un point creux n'y appartient pas.



1. a. Lire $f(-1)$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$. La fonction f a-t-elle une limite en -1 ? Si oui, laquelle ?
   b. Lire $f(1)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. La fonction f a-t-elle une limite en 1 ?
   c. Lire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.
2. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 1$ si $x < 1$ et $g(x) = x^2 + 2$ si $x \geq 1$. Calculer les limites à gauche et à droite de g en 1. La fonction g a-t-elle une limite en 1 ?
3. Soit $h(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ pour $x \neq 1$. Simplifier $h(x)$ pour $x > 1$, puis pour $x < 1$. La fonction h a-t-elle une limite en 1 ?
4. On note E la fonction partie entière. Déterminer $\lim\limits_{x\to 2^-} E(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} E(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2{,}5} E(x)$.

Leçon 3 : limites infinies, limites à l'infini, asymptotes

Exercice 4 : les fonctions de référence

1. Donner, sans justifier, les limites suivantes.
   a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$ b. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4$ c. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5$ d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}$ e. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x^3}$
   f. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x^3}$ g. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^4}$ h. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$ i. $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}$
2. Recopier et compléter le tableau de valeurs de $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$, puis expliquer pourquoi la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ n'a pas de limite en 0.

x	$-0{,}01$	$-0{,}1$	$0{,}1$	$0{,}01$
$\dfrac{1}{x^3}$				

Exercice 5 : asymptotes horizontales et verticales

1. Soit $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x+1}$.
   a. Donner l'ensemble de définition de f. De quelle courbe, et par quelle translation, la courbe de f est-elle l'image ?
   b. Déterminer les limites de f à gauche et à droite en -1, puis en $+\infty$ et en $-\infty$.
   c. En déduire les asymptotes à la courbe de f.
2. Soit $g(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$.
   a. Vérifier que, pour tout $x \neq 2$, $g(x) = 2 + \dfrac{3}{x-2}$.
   b. Déterminer les limites de g en 2 (à gauche et à droite), en $+\infty$ et en $-\infty$, et en déduire les asymptotes à sa courbe.
3. Soit $h(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. Déterminer les limites de h en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$, puis les asymptotes à sa courbe.

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 4 : opérations sur les limites

Exercice 6 : appliquer les théorèmes

1. Calculer les limites suivantes.
   a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3x-\dfrac{1}{x}\right)$ b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-5+\dfrac{2}{x}\right)$ c. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+1\right)$
   d. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)\left(x^2+2\right)$ e. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^2+1}$ f. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9+\dfrac{1}{x}}$ g. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}$
2. Calculer les limites à gauche et à droite au point indiqué, en étudiant le signe du dénominateur.
   a. $\dfrac{x+1}{x}$ en 0 b. $\dfrac{x-5}{x-3}$ en 3 c. $\dfrac{x+1}{(x-2)^2}$ en 2 d. $\dfrac{2x}{x^2-1}$ en -1
3. Dans chaque cas, dire si les théorèmes permettent de conclure directement ou s'il s'agit d'une forme indéterminée (on ne demande pas la limite).
   a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x\right)$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x\right)$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x^2}$ d. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\times\dfrac{1}{x^2}$

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 5 : lever une indétermination

Exercice 7 : polynômes et fonctions rationnelles à l'infini

1. Calculer les limites suivantes.
   a. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+x^2+5\right)$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\right)$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-3x+1}{2x^2+5}$
   d. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{3x+2}$ e. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+2}{x^2-1}$ f. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+x}{1-2x^3}$
2. Calculer les limites des questions 3.a et 3.c de l'exercice 6.
3. Quelle asymptote la courbe de $x\mapsto\dfrac{4x^2-3x+1}{2x^2+5}$ admet-elle en $+\infty$?

Exercice 8 : formes $0/0$ et expression conjuguée

Calculer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ b. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x^2+5x+6}$ c. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

d. $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ e. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ f. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

g. *(Pour aller plus loin.)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$. On pourra écrire, pour $x>0$, $\sqrt{x^2+3x}=x\sqrt{1+\frac{3}{x}}$.

Leçon 6 : continuité en un point

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 9 : est-elle continue ?

Dans chaque cas, étudier la continuité de la fonction au point indiqué.

1. $f(x)=x^2-2x$ si $x\le3$, et $f(x)=2x-3$ si $x>3$; en 3.
2. $g(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ si $x\neq2$, et $g(2)=4$; en 2. Même question si l'on pose plutôt $g(2)=3$.
3. $h(x)=|x-2|$; en 2.
4. $k(x)=x+1$ si $x<0$, et $k(x)=\sqrt{x+1}$ si $x\ge0$; en 0.
5. La partie entière E en 2 : est-elle continue à gauche ? à droite ?

Exercice 10 : choisir un paramètre

1. Soit a un réel, et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + 1$ si $x \leq 2$, et $f(x) = x^2 - a$ si $x > 2$. Déterminer a pour que f soit continue en 2.
2. Soit m un réel, et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ si $x < 1$, et $g(x) = 2x + m$ si $x \geq 1$. Déterminer m pour que g soit continue en 1.
3. On reprend la fonction f de la figure de l'exercice 3.
   a. f est-elle continue en -1 ? en 0 ?
   b. f est-elle continue à droite en 1 ? à gauche en 1 ? continue en 1 ?

Leçon 7 : continuité sur un intervalle

Exercice 11 : fonctions continues et images d'intervalles

1. Justifier que chaque fonction est continue sur l'intervalle (ou les intervalles) indiqué(s).
   a. $f(x) = 3x^4 - x + 2$ sur $\mathbb{R}$;
   b. $g(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4}$ sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-2[$, $]-2\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$;
   c. $h(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ sur $\mathbb{R}$;
   d. $k(x) = x + \sqrt{x - 1}$ sur $[1\,;+\infty[$.
2. Déterminer l'image de l'intervalle indiqué, en utilisant le sens de variation.
   a. La fonction carré, sur $[-2\,;1]$.
   b. La fonction inverse, sur $\left[\frac{1}{2}\,;4\right]$.
   c. $u(x) = -2x + 3$, sur $[-1\,;2]$.
   d. $v(x) = x^2 - 4x + 1$, sur $[0\,;3]$ (on pourra écrire $v(x) = (x-2)^2 - 3$).
3. L'image de $[0\,;2[$ par la partie entière est $\{0\,;1\}$, qui n'est pas un intervalle. Est-ce en contradiction avec le théorème de la leçon 7 ? Justifier.

Bacad, une solution de BarroTech

S2-S4 Exercice de la leçon 8

Exercice 12 : continuité, monotonie et bijection

1. Soit $f(x) = x^3 + 2x - 1$ sur $[0\,;1]$.
   a. Justifier que f est continue et strictement croissante sur $[0\,;1]$.
   b. Déterminer $f\big([0\,;1]\big)$.
   c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $[0\,;1]$.
   d. Calculer $f(0{,}4)$ et $f(0{,}5)$. En déduire un encadrement de α.
2. Soit $h(x) = x^2 - 4x + 5$.
   a. Vérifier que $h(x) = (x-2)^2 + 1$. En déduire que h est strictement croissante sur $[2\,;5]$.
   b. Montrer que h est une bijection de $[2\,;5]$ sur un intervalle que l'on précisera.
   c. Montrer que l'équation $h(x) = 3$ a une unique solution dans $[2\,;5]$, puis la calculer.
   d. Résoudre $h(x) = 3$ sur $[0\,;5]$. La fonction h est-elle une bijection de $[0\,;5]$ sur son image ?

SenAcad, une solution de BarroTech

S1-S3 Exercices de la leçon 9

Exercice 13 : limites autour de $\sin x/x$

Calculer les limites suivantes (les angles sont en radians).

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$ b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$ c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 4x}$ d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 2x}$

e. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2+x}$ f. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$ (on pourra poser $t=\frac{1}{x}$)

g. *(Pour aller plus loin.)* Montrer que, pour x proche de 0 et non nul,

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos x},$$

puis en déduire $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Exercice 14 : prolongement par continuité et valeurs intermédiaires

1. Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité au point indiqué ? Si oui, préciser le prolongement.
   a. $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ en 2 b. $g(x)=\dfrac{\sin 2x}{x}$ en 0 c. $h(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$ en 0 d. $k(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ en 0
2. Soit $p(x)=x^3-3x+1$.
   a. Calculer $p(-2)$, $p(-1)$, $p(0)$, $p(1)$ et $p(2)$.
   b. Montrer que l'équation $p(x)=0$ a au moins une solution dans chacun des intervalles $[-2\,;-1]$, $[0\,;1]$ et $[1\,;2]$.
   c. Calculer $p(0{,}3)$ et $p(0{,}4)$. Que peut-on en déduire ?
3. Soit $q(x)=x^2-2x$ sur $[-1\,;3]$.
   a. Écrire $q(x)=(x-1)^2-1$ et dresser le tableau de variations de q sur $[-1\,;3]$. En déduire $q\big([-1\,;3]\big)$.
   b. Justifier que le réel 2 a au moins un antécédent par q dans $[-1\,;3]$. Combien en a-t-il ? Les calculer.

Devoir type et solution de BarroTech