Corrigés détaillés

PREMIÈRE S · CHAPITRE 2 · LIMITES ET CONTINUITÉ

Corrigés détaillés des exercices d'application. Tous les résultats ont été vérifiés par calcul exact, et recoupés par un calcul numérique indépendant. Les rappels de méthode sont en italique.

Leçon 1 : la limite d'une fonction en un point

Exercice 1

1. Pour $x \neq 3$, $f(x) = x + 3$ (question 3), ce qui donne directement les valeurs. Par exemple, $f(2{,}9) = \dfrac{8{,}41 - 9}{-0{,}1} = \dfrac{-0{,}59}{-0{,}1} = 5{,}9$.

x	$2{,}9$	$2{,}99$	$3{,}01$	$3{,}1$
$f(x)$	$5{,}9$	$5{,}99$	$6{,}01$	$6{,}1$

2. Quand x s'approche de 3, $f(x)$ s'approche de 6 : on conjecture $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$.
3. $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, donc pour $x \neq 3$, $f(x) = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = x + 3$. Ainsi $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3 + 3 = 6$.
4. *Fonctions usuelles définies au point : on remplace x par sa valeur.*
   a. $(-2)^3 + 2 \times (-2)^2 - (-2) + 4 = -8 + 8 + 2 + 4 = 6$.
   b. $\dfrac{3 - 1}{1 + 1} = 1$.
   c. $\sqrt{4} = 2$.
   d. $\dfrac{1 - 1 - 2}{-1 - 2} = \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 2

Le numérateur s'annule au point : on le factorise par $x - a$.

a. $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$, donc pour $x \neq 1$ le quotient vaut $x + 4$: **limite** 5.

b. $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$, donc pour $x \neq -3$ le quotient vaut $x - 3$: **limite** -6.

c. $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, donc pour $x \neq 2$ le quotient vaut $x - 2$: **limite** 0.

d. $x^2 + 5x = x(x + 5)$, donc pour $x \neq 0$ le quotient vaut $x + 5$: **limite** 5.

Leçon 2 : limite à gauche, limite à droite

Exercice 3

1. a. $f(-1) = 2$ (point plein). Les deux morceaux arrivent au point creux $(-1\,;0)$: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0$. Ces limites sont égales, donc f a une limite en -1 : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$ (différente de $f(-1)$).

   b. $f(1) = -1$. À gauche, la courbe arrive au point creux $(1\,;2)$: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$. À droite, elle part du point plein $(1\,;-1)$: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -1$. Les limites sont différentes : f **n'a pas de limite en** 1.

   c. Entre -1 et 1, la courbe est le segment de la droite $y = x + 1$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. Entre 1 et 4, c'est la droite $y = x - 2$: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$.

2. À gauche de 1, $g(x) = 2x + 1$: $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 3$. À droite, $g(x) = x^2 + 2$: $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = 3$. Les deux limites sont égales, donc $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 3$.

3. Pour $x > 1$, $|x - 1| = x - 1$ et $h(x) = 1$. Pour $x < 1$, $|x - 1| = -(x - 1)$ et $h(x) = -1$. Donc $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = -1$: **pas de limite en** 1.

4. Sur $[1\,;2[$, $E(x) = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 2^-} E(x) = 1$. Sur $[2\,;3[$, $E(x) = 2$, donc $\lim\limits_{x \to 2^+} E(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to 2{,}5} E(x) = 2$.

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 3 : limites infinies, limites à l'infini, asymptotes

Exercice 4

1. a. $+\infty$ b. $+\infty$ (4 est pair) c. $-\infty$ (5 est impair) d. 0 e. $+\infty$ f. $-\infty$ g. $+\infty$ h. $+\infty$ i. 0.
2.

x	$-0{,}01$	$-0{,}1$	$0{,}1$	$0{,}01$
$\dfrac{1}{x^3}$	$-1\,000\,000$	$-1\,000$	$1\,000$	$1\,000\,000$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$: ces limites sont différentes, donc la fonction n'a pas de limite en 0.

Exercice 5

1. a. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Comme $f(x) = \dfrac{1}{x-(-1)} + 3$, la courbe de f est l'image de la courbe de la fonction inverse par la translation de vecteur $\vec{u}(-1\,;3)$.

   b. Quand $x \to -1^+$, $x+1 \to 0$ en restant positif, donc $\dfrac{1}{x+1} \to +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$. En $\pm\infty$, $\dfrac{1}{x+1} \to 0$, donc $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 3$.

   c. **Asymptote verticale** : $x = -1$. **Asymptote horizontale** : $y = 3$, en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. a. $2 + \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{2(x-2)+3}{x-2} = \dfrac{2x-1}{x-2} = g(x)$.

   b. En 2 : le numérateur 3 est positif ; $x-2 \to 0^+$ à droite et 0^- à gauche. Donc $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = -\infty$. En $\pm\infty$, $\dfrac{3}{x-2} \to 0$, donc $\lim\limits_{x\to \pm\infty} g(x) = 2$. **Asymptotes** : $x = 2$ (verticale) et $y = 2$ (horizontale).
3. Quand $x \to 0$, $x^2 \to 0$ en restant positif, donc $\dfrac{2}{x^2} \to +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -\infty$ (des deux côtés) : l'axe des ordonnées, $x = 0$, est asymptote verticale. En $\pm\infty$, $\dfrac{2}{x^2} \to 0$, donc $\lim\limits_{x\to \pm\infty} h(x) = 1$: la droite $y = 1$ est asymptote horizontale.

Leçon 4 : opérations sur les limites

Exercice 6

1. a. $x^2 \to +\infty$, $3x \to +\infty$, $-\dfrac{1}{x} \to 0$: par somme, $+\infty$.

   b. $x^3 \to -\infty$, $-5 + \dfrac{2}{x} \to -5$, donc la limite vaut $-\infty$.

   c. $3 + \dfrac{1}{x} \to 3$ et $x^2 + 1 \to +\infty$: par produit, $+\infty$.

   d. $1 - x \to -\infty$ et $x^2 + 2 \to +\infty$: par produit (règle des signes), $-\infty$.

   e. $x^2 + 1 \to +\infty$, donc $\dfrac{3}{x^2+1} \to 0$.

   f. $9 + \dfrac{1}{x} \to 9$, donc la racine tend vers 3.

   g. $1 - x \to +\infty$ quand $x \to -\infty$, donc $+\infty$.

2. a. Le numérateur tend vers 1. À droite de 0, $x > 0$: $+\infty$; à gauche, $x < 0$: $-\infty$.

   b. Le numérateur tend vers -2. Pour $x > 3$, $x - 3 > 0$: « $\frac{-2}{0^+}$ », $-\infty$; pour $x < 3$: « $\frac{-2}{0^-}$ », $+\infty$.

   c. Le numérateur tend vers 3 ; $(x-2)^2$ tend vers 0 en restant positif, des deux côtés : la limite vaut $+\infty$ à gauche comme à droite, donc $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{(x-2)^2} = +\infty$.

   d. Le numérateur tend vers -2. On écrit $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$; près de -1, $x - 1$ est négatif (proche de -2). Pour $x > -1$, $x + 1 > 0$, donc $x^2 - 1 < 0$: « $\frac{-2}{0^-}$ », la limite à droite vaut $+\infty$. Pour $x < -1$, $x^2 - 1 > 0$: la limite à gauche vaut $-\infty$.

SenAcad, une solution de BarroTech

3. a. $+\infty - \infty$: **forme indéterminée**. b. $+\infty + \infty$: on conclut, la limite vaut $+\infty$. c. $\dfrac{\infty}{\infty}$: **forme indéterminée**. d. $\infty \times 0$: **forme indéterminée**.

Leçon 5 : lever une indétermination

Exercice 7

En $\pm\infty$: terme de plus haut degré (polynôme), quotient des termes de plus haut degré (fonction rationnelle).

1. a. $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3 = +\infty$.
   b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$.
   c. $\dfrac{4x^2}{2x^2} = 2$, donc la limite vaut 2.
   d. $\dfrac{x^2}{3x} = \dfrac{x}{3} \to -\infty$.
   e. $\dfrac{5x}{x^2} = \dfrac{5}{x} \to 0$.
   f. $\dfrac{x^3}{-2x^3} = -\dfrac{1}{2}$, donc la limite vaut $-\dfrac{1}{2}$.
2. Exercice 6, 3.a : $x^2 - x$ a la limite de x^2, soit $+\infty$. Exercice 6, 3.c : $\dfrac{x+1}{x^2}$ a la limite de $\dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$, soit 0.
3. La limite en $+\infty$ vaut 2 (question 1.c) : la droite $y = 2$ est asymptote horizontale en $+\infty$ (et aussi en $-\infty$, la limite y étant la même).

SenAcad, une solution de BarroTech

Exercice 8

a. $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$; pour $x \neq 1$ le quotient vaut $x+3$, donc la limite vaut 4.

b. $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ et $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$; pour $x \neq -2$ le quotient vaut $\dfrac{x-2}{x+3} \to \dfrac{-4}{1}$, donc la limite vaut -4.

c. $x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2+x+1\right)$ et $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$; pour $x \neq 1$ le quotient vaut $\dfrac{x^2+x+1}{x+1} \to \dfrac{3}{2}$.

d. $\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \dfrac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+3} \to \dfrac{1}{6}$.

e. $\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \dfrac{(x+4)-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2} \to \dfrac{1}{4}$.

f. $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc la limite vaut 0.

g. $\sqrt{x^2+3x} - x = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}$. Pour $x > 0$, $\sqrt{x^2+3x} = x\sqrt{1+\frac{3}{x}}$, donc l'expression vaut $\dfrac{3x}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right)} = \dfrac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1} \to \dfrac{3}{1+1}$, donc la limite vaut $\dfrac{3}{2}$.

Leçon 6 : continuité en un point

Exercice 9

On compare la limite à gauche, la limite à droite et la valeur au point.

1. $f(3) = 9 - 6 = 3$ et $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2 \times 3 - 3 = 3$. Les trois nombres sont égaux : f **est continue en** 3.
2. Pour $x \neq 2$, $g(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$, donc $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4 = g(2)$: g **est continue en** 2. Si $g(2) = 3$, alors $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4 \neq 3$: g n'est **pas** continue en 2.
3. $h(x) = 2 - x$ si $x < 2$ et $h(x) = x - 2$ si $x \geq 2$. Les limites à gauche et à droite en 2 valent 0, et $h(2) = 0$: h **est continue en** 2.
4. $k(0) = \sqrt{1} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^-} k(x) = 0 + 1 = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} k(x) = \sqrt{1} = 1$: k **est continue en** 0.
5. $E(2) = 2$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} E(x) = 2$: E est **continue à droite** en 2. $\lim\limits_{x \to 2^-} E(x) = 1 \neq 2$: E n'est **pas continue à gauche** en 2.

Exercice 10

1. $f(2) = 2a + 1$, et c'est aussi la limite à gauche ; la limite à droite vaut $4 - a$. f est continue en 2 si, et seulement si, $2a + 1 = 4 - a$, soit $a = 1$.
2. Pour $x < 1$, $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, donc $g(x) = x + 2$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 3$. D'autre part, $g(1) = 2 + m$, qui est aussi la limite à droite. g est continue en 1 si, et seulement si, $2 + m = 3$, soit $m = 1$.
3. a. En -1 : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0 \neq f(-1) = 2$, donc f n'est **pas continue en** -1 (la courbe a un trou et un point isolé). En 0 : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$, donc f **est continue en** 0.

   b. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -1 = f(1)$: **continue à droite** en 1. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 \neq f(1)$: **pas continue à gauche**, donc pas continue en 1 (la courbe fait un saut).

SenAced, une solution de RomTech

Leçon 7 : continuité sur un intervalle

Exercice 11

1. a. f est un polynôme : elle est continue sur $\mathbb{R}$.

   b. g est une fonction rationnelle, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$: elle est continue sur chacun des trois intervalles.

   c. $x \mapsto x^2+1$ est un polynôme, continu et positif (il vaut au moins 1) sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On lui retranche $x \mapsto x$, continue : h est continue sur $\mathbb{R}$.

   d. $x \mapsto x-1$ est continue et positive sur $[1\,;+\infty[$, donc $x \mapsto \sqrt{x-1}$ y est continue ; on ajoute $x \mapsto x$: k est continue sur $[1\,;+\infty[$.

2. a. La fonction carré est continue, décroissante sur $[-2\,;0]$ (image $[0\,;4]$) et croissante sur $[0\,;1]$ (image $[0\,;1]$). Donc l'image de $[-2\,;1]$ est $[0\,;4]$.

   b. La fonction inverse est continue et décroissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;4\right]$: l'image est $\left[\frac{1}{4}\,;2\right]$.

   c. u est affine de coefficient $-2<0$, donc continue et décroissante : l'image est $\big[u(2)\,;u(-1)\big]=[-1\,;5]$.

   d. $v(x)=(x-2)^2-3$: v est continue, décroissante sur $[0\,;2]$ (de $v(0)=1$ à $v(2)=-3$) et croissante sur $[2\,;3]$ (jusqu'à $v(3)=-2$). Les images sont $[-3\,;1]$ et $[-3\,;-2]$, donc l'image de $[0\,;3]$ est $[-3\,;1]$.

3. Il n'y a pas de contradiction : la partie entière n'est **pas continue** sur $[0\,;2[$ (elle ne l'est pas en 1). Le théorème ne s'applique donc pas.

SenAvau, une solution de Barrolech

S2-S4 Exercice 12

1. a. f est un polynôme, donc continue sur $[0\,;1]$. Si $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, alors $x_1^3 < x_2^3$ et $2x_1 < 2x_2$; en ajoutant, $f(x_1) < f(x_2)$: f est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

   b. f est continue et croissante, donc $f\big([0\,;1]\big) = \big[f(0)\,;f(1)\big] = [-1\,;2]$.

   c. D'après le théorème de la leçon 8, f est une bijection de $[0\,;1]$ sur $[-1\,;2]$. Comme $0 \in [-1\,;2]$, l'équation $f(x) = 0$ a une **unique** solution α dans $[0\,;1]$.

   d. $f(0{,}4) = 0{,}064 + 0{,}8 - 1 = -0{,}136 < 0$ et $f(0{,}5) = 0{,}125 + 1 - 1 = 0{,}125 > 0$. Comme f est strictement croissante et $f(\alpha) = 0$, on a $f(0{,}4) < f(\alpha) < f(0{,}5)$, donc $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

2. a. $(x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5 = h(x)$. Si $2 \leq x_1 < x_2 \leq 5$, alors $0 \leq x_1 - 2 < x_2 - 2$, donc $(x_1 - 2)^2 < (x_2 - 2)^2$ (la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$), puis $h(x_1) < h(x_2)$: h est strictement croissante sur $[2\,;5]$.

   b. h est un polynôme, donc continue ; elle est strictement croissante sur $[2\,;5]$. C'est donc une bijection de $[2\,;5]$ sur $\big[h(2)\,;h(5)\big] = [1\,;10]$.

   c. $3 \in [1\,;10]$, donc l'équation $h(x) = 3$ a une unique solution dans $[2\,;5]$. On résout : $(x-2)^2 + 1 = 3 \iff (x-2)^2 = 2$. Comme $x - 2 \geq 0$ sur $[2\,;5]$, $x - 2 = \sqrt{2}$: la solution est $x = 2 + \sqrt{2}$ (environ $3{,}41$).

   d. Sur $[0\,;5]$, $(x-2)^2 = 2 \iff x = 2 - \sqrt{2}$ ou $x = 2 + \sqrt{2}$, deux nombres de $[0\,;5]$ ($2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59$). Le réel 3 a donc deux antécédents dans $[0\,;5]$: h n'est **pas** une bijection de $[0\,;5]$ sur son image $[1\,;10]$. Ce n'est pas contradictoire avec le théorème : h n'est pas monotone sur $[0\,;5]$.

SenAcad, une solution de Barrolech

S1-S3 Exercice 13

a. $\dfrac{\sin 5x}{x} = 5 \times \dfrac{\sin 5x}{5x}$; avec $t = 5x \to 0$, $\dfrac{\sin t}{t} \to 1$, donc la limite vaut 5.

b. $\dfrac{\sin 2x}{3x} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{\sin 2x}{2x} \to \dfrac{2}{3}$.

c. $\dfrac{x}{\sin 4x} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{\frac{\sin 4x}{4x}}$, et $\dfrac{\sin 4x}{4x} \to 1$, donc la limite vaut $\dfrac{1}{4}$.

d. $\dfrac{\sin 4x}{\sin 2x} = \dfrac{\sin 4x}{4x} \times \dfrac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}} \times \dfrac{4x}{2x}$, et $\dfrac{4x}{2x} = 2$, donc la limite vaut 2.

e. $\dfrac{\sin x}{x^2 + x} = \dfrac{\sin x}{x(x+1)} = \dfrac{\sin x}{x} \times \dfrac{1}{x+1} \to 1 \times 1$, donc la limite vaut 1.

f. Avec $t = \dfrac{1}{x}$: quand $x \to +\infty$, $t \to 0$ (en restant positif), et $x \sin \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sin t}{t} \to 1$.

g. $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$. Pour x proche de 0, $1 + \cos x \neq 0$ (il est proche de 2), donc

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x}.$$

Comme $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ et $\cos x \to 1$, la limite vaut $1^2 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

SenAcad, une solution de BarroTech

S1-S3 Exercice 14

1. a. Pour $x \neq 2$, $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$, donc $f(x) = x + 3 \to 5$. La limite est réelle : f est **prolongeable** par continuité en 2, en posant $f(2) = 5$; le prolongement est $x \mapsto x + 3$.

   b. $g(x) = 2 \times \dfrac{\sin 2x}{2x} \to 2$: **prolongeable** en 0, en posant $g(0) = 2$.

   c. Le numérateur tend vers 1 et x^2 tend vers 0 en restant positif : $h(x) \to +\infty$. La limite est infinie : h **n'est pas prolongeable** par continuité en 0.

   d. $\dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \dfrac{(x+1) - 1}{x\left(\sqrt{x+1} + 1\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + 1} \to \dfrac{1}{2}$: **prolongeable** en 0, en posant $k(0) = \dfrac{1}{2}$.

2. a. $p(-2) = -8 + 6 + 1 = -1$; $p(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$; $p(0) = 1$; $p(1) = 1 - 3 + 1 = -1$; $p(2) = 8 - 6 + 1 = 3$.

   b. p est un polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$. Sur $[-2\,;-1]$, $p(-2) < 0 < p(-1)$; sur $[0\,;1]$, $p(1) < 0 < p(0)$; sur $[1\,;2]$, $p(1) < 0 < p(2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ a au moins une solution dans chacun de ces intervalles. Comme $p(1) \neq 0$, ces solutions sont distinctes : l'équation a **au moins trois solutions** dans $[-2\,;2]$.

   c. $p(0{,}3) = 0{,}027 - 0{,}9 + 1 = 0{,}127 > 0$ et $p(0{,}4) = 0{,}064 - 1{,}2 + 1 = -0{,}136 < 0$. Le théorème, appliqué sur $[0{,}3\,;0{,}4]$, montre que l'équation a une solution **comprise entre** $0{,}3$ **et** $0{,}4$.

3. a. $(x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 - 1 = q(x)$. q est décroissante sur $[-1\,;1]$ et croissante sur $[1\,;3]$, avec $q(-1) = 3$, $q(1) = -1$ et $q(3) = 3$.

SenAcad, une solution de BarroTech

x	-1		1		3
$q(x)$	3	décroissante	-1	croissante	3

q est continue, donc $q\big([-1\,;1]\big) = [-1\,;3]$, $q\big([1\,;3]\big) = [-1\,;3]$, et $q\big([-1\,;3]\big) = [-1\,;3]$.

b. $2 \in [-1\,;3] = q\big([-1\,;3]\big)$: 2 a au moins un antécédent. Plus précisément, q est continue et strictement monotone sur $[-1\,;1]$ et sur $[1\,;3]$, et 2 appartient à l'image de chacun : il a **un antécédent dans chacun**, donc **deux** en tout (1 n'en est pas un, car $q(1) = -1$). On résout $x^2 - 2x = 2$, soit $x^2 - 2x - 2 = 0$: $\Delta = 4 + 8 = 12$, d'où $x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$, c'est-à-dire $1 - \sqrt{3}$ (environ $-0{,}73$) et $1 + \sqrt{3}$ (environ $2{,}73$).