Exercices

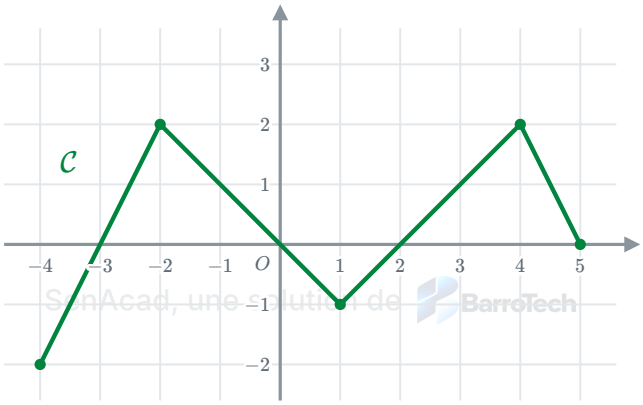
PREMIÈRE S · CHAPITRE 1 · GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Exercices classés par leçon, du plus simple au plus complet. Les exercices 1 à 11 sont communs à toutes les séries S. L'exercice 12 est réservé aux séries S2, S4, S2A et S5. Les exercices 13 et 14 sont réservés aux séries S1, S3 et S1A. Pour les tracés, prends un repère orthonormé d'unité 1 cm, sauf indication contraire. Les corrigés détaillés sont dans la fiche « Corrigés ».

Leçon 1 : image directe, image réciproque

Exercice 1 : lecture graphique

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction f. Elle est formée de segments qui joignent les points $(-4\,;-2)$, $(-2\,;2)$, $(1\,;-1)$, $(4\,;2)$ et $(5\,;0)$.



SunAcad, une solution de BarroTech

1. Donner l'ensemble de définition de f, puis lire $f(-4)$, $f(1)$ et $f(4)$.
2. Lire les antécédents de 0, puis ceux de 2.
3. Déterminer graphiquement $f\big([-4\,;-2]\big)$, $f\big([-2\,;1]\big)$, $f\big([-3\,;4]\big)$ et $f\big([-4\,;5]\big)$.
4. Déterminer graphiquement $f^{-1}\big([0\,;2]\big)$, $f^{-1}\big(\{3\}\big)$ et $f^{-1}\big(]-\infty\,;0[\big)$.
5. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\geq 0$.

Exercice 2 : par le calcul

Soit $f(x)=x^2-6x+5$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x)=(x-3)^2-4$. En déduire le sens de variation de f et son minimum.
2. Déterminer $f\big([2\,;6]\big)$ et $f\big([4\,;7]\big)$.
3. Déterminer $f^{-1}\big(\{0\}\big)$, $f^{-1}\big([-3\,;0]\big)$, $f^{-1}\big(]-\infty\,;-5]\big)$ et $f^{-1}\big([-4\,;+\infty[\big)$.
4. Soit $g(x)=\sqrt{x+2}$. Donner D_g et le sens de variation de g, puis déterminer $g\big([-1\,;7]\big)$, $g^{-1}\big([0\,;2]\big)$ et $g^{-1}\big([1\,;3]\big)$.

Leçon 2 : parité, périodicité, ensemble d'étude

Exercice 3 : parité

1. Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes (commencer par l'ensemble de définition) :
   a. $f_1(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$; b. $f_2(x) = x^5 - 2x^3 + x$; c. $f_3(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; d. $f_4(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$;
   e. $f_5(x) = x^2 - 4x$; f. $f_6(x) = |x| + x^2$; g. $f_7(x) = \sqrt{9 - x^2}$; h. $f_8(x) = x\,|x|$.
2. f est une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$, et $f(2) = -3$. Donner $f(-2)$ et $f(0)$.
3. f est une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \geq 0$, $f(x) = x^2 - 2x$. Calculer $f(-1)$, puis exprimer $f(x)$ pour $x \leq 0$.

Exercice 4 : périodicité et ensemble d'étude

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(2x)$ est périodique de période π, que $g : x \mapsto \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est périodique de période 4π, et que $h : x \mapsto \cos(\pi x)$ est périodique de période 2.
2. Soit $\varphi(x) = \big(x - E(x)\big)^2$, où $E(x)$ est la partie entière de x.
   a. Montrer que φ est périodique de période 1.
   b. Exprimer $\varphi(x)$ pour $x \in [0\,;1[$, puis calculer $\varphi(2{,}5)$ et $\varphi(-0{,}5)$.
   c. Tracer la courbe de φ sur $[-2\,;2[$.
3. Montrer que $f : x \mapsto \sin(2x)$ est impaire. Sur quel intervalle suffit-il de l'étudier ? Expliquer comment on obtient ensuite toute la courbe.
4. Montrer que la fonction carré n'est pas périodique. *Indication : si $T > 0$ était une période, que vaudrait $f(0 + T)$?*

Une ressource de la communauté de BarroTech

Leçon 3 : éléments de symétrie d'une courbe

Exercice 5 : centres de symétrie

1. Soit $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 3}$. Donner D_f, puis montrer, à l'aide de la formule $f(2a - x) + f(x) = 2b$, que le point $\Omega(3\,;1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
2. Soit $g(x) = x^3 + 3x^2 - 1$. En posant $x = X - 1$ et $y = Y + 1$, montrer que le point $\Omega(-1\,;1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$.
3. Soit $h(x) = x + \dfrac{1}{x - 2}$. Montrer que le point $\Omega(2\,;2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_h$.

Exercice 6 : axes de symétrie

Le repère est orthogonal.

1. Soit $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$. Vérifier que $f(x) = x^2(x-2)^2 + 1$, puis montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
2. Soit $g(x) = \sqrt{4x - x^2}$. Déterminer D_g, puis montrer que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_g$.
3. Soit $h(x) = |x-1| + |x-3|$. Montrer que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_h$.
4. Soit $k(x) = x^2 + x$. Montrer que la droite d'équation $x = 1$ n'est **pas** un axe de symétrie de $\mathcal{C}_k$.

Leçon 4 : fonctions associées par translation

Exercice 7 : translations et paraboles

1. On note Γ la courbe de la fonction racine carrée. Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition et la translation qui transforme Γ en sa courbe, puis tracer les quatre courbes dans un même repère :
   a. $g_1(x) = \sqrt{x} - 2$; b. $g_2(x) = \sqrt{x+3}$; c. $g_3(x) = \sqrt{x-1} + 2$.
2. La courbe d'une fonction g est l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $\vec{u}(-3\,;1)$. Donner $g(x)$ sous forme développée.
3. Pour chacune des fonctions suivantes, écrire $f(x)$ sous forme canonique, puis préciser la parabole de référence, le vecteur de la translation, le sommet et l'axe de symétrie :
   a. $f_1(x) = x^2 + 4x + 1$; b. $f_2(x) = 2x^2 - 12x + 13$; c. $f_3(x) = -x^2 + 2x + 3$.

Exercice 8 : fonctions homographiques

1. Soit $f(x) = \dfrac{2x+5}{x+2}$. Montrer que, pour tout $x \neq -2$, $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+2}$. En déduire que $\mathcal{C}_f$ est l'image de l'hyperbole $y = \dfrac{1}{x}$ par une translation que l'on précisera. Donner le centre de symétrie et les asymptotes de $\mathcal{C}_f$, puis la tracer.
2. Même travail avec $g(x) = \dfrac{3x-1}{x-1}$, que l'on écrira sous la forme $\beta + \dfrac{k}{x-\alpha}$.
3. Même travail avec $h(x) = \dfrac{-2x+1}{x-1}$.
4. Une fonction f s'écrit $f(x) = -1 + \dfrac{k}{x-2}$, et sa courbe passe par le point $A(3\,;1)$. Trouver k, puis écrire $f(x)$ sous la forme $\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Leçon 5 : les fonctions $|f|$ et $x \mapsto f(|x|)$

Exercice 9 : construire $|f|$ et $f(|x|)$

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1. Écrire $f(x)$ sous forme canonique, trouver les réels où f s'annule, et tracer $\mathcal{C}_f$.
2. Soit $g(x) = |f(x)|$. Écrire $g(x)$ sans valeur absolue sur chacun des intervalles $]-\infty\,;1]$, $[1\,;3]$ et $[3\,;+\infty[$. Tracer la courbe de g à partir de $\mathcal{C}_f$, et donner le sens de variation de g.
3. Soit $h(x) = f(|x|)$. Montrer que $h(x) = x^2 - 4|x| + 3$ et que h est paire. Tracer la courbe de h à partir de $\mathcal{C}_f$, et donner le minimum de h.
4. Calculer $g(-1)$, $h(-1)$, $g(2)$ et $h(2)$.

Exercice 10 : nombre de solutions d'une équation

On reprend les fonctions g et h de l'exercice 9.

1. Selon les valeurs du réel m, donner graphiquement le nombre de solutions de l'équation $|x^2 - 4x + 3| = m$.
2. Même question pour l'équation $x^2 - 4|x| + 3 = m$.
3. Résoudre par le calcul l'équation $|x^2 - 4x + 3| = 1$. Le nombre de solutions est-il celui de la question 1 ?
4. Résoudre par le calcul l'équation $x^2 - 4|x| + 3 = 3$.

SenAcad, une solution de BarroTech

Leçon 6 : fonctions composées

Exercice 11 : composer et décomposer

1. Soit $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x^2$. Exprimer $(v \circ u)(x)$ et $(u \circ v)(x)$. Calculer $(v \circ u)(0)$ et $(u \circ v)(0)$. Que peut-on en conclure ?
2. Soit $v(x) = \sqrt{x}$ et $w(x) = \dfrac{1}{x - 2}$. Déterminer l'ensemble de définition et l'expression de $w \circ v$, puis de $v \circ w$.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 9}$.
4. Décomposer chacune des fonctions suivantes sous la forme $v \circ u$, en précisant u et v :
   a. $h_1(x) = \sqrt{3x + 6}$; b. $h_2(x) = (x^2 + 1)^3$; c. $h_3(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$; d. $h_4(x) = |2x - 5|$; e. $h_5(x) = \cos(x^2)$.
5. Soit $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = (x - 3)^2 - 2(x - 3)$. Écrire g comme composée de f et d'une fonction affine. Quelle translation transforme $\mathcal{C}_f$ en $\mathcal{C}_g$?

S2-S4 Exercice de la leçon 7

Exercice 12 : courbe d'une fonction réciproque

Le repère est orthonormé. Soit $f(x) = x^2 + 2x$, définie sur $I = [-1\,;+\infty[$.

1. Montrer que $f(x) = (x+1)^2 - 1$. En déduire que f est strictement croissante sur I, puis que f est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Calculer $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$. En déduire quatre points de la courbe de f^{-1}. Lesquels sont sur la droite Δ d'équation $y = x$?
3. Tracer $\mathcal{C}_f$, la droite Δ, puis la courbe de f^{-1}.
4. *(Facultatif.)* Vérifier que, pour $x \geq -1$, $f\big(-1 + \sqrt{x+1}\big) = x$. Que représente la fonction $x \mapsto -1 + \sqrt{x+1}$?
5. Soit $g(x) = \dfrac{4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$. Montrer que g est une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur lui-même et qu'elle est sa propre réciproque. Que peut-on dire de sa courbe ?

SenAcad, une solution de BarroTech

S1-S3 Exercices de la leçon 8

Exercice 13 : fonctions bornées, comparaison, opérations

1. Soit $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. Montrer que, pour tout réel x, $-1 \leq f(x) \leq 1$. Ces bornes sont-elles atteintes ?
2. Soit $g(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2+1}$. Montrer que $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2+1}$, puis que $1 < g(x) \leq 3$ pour tout réel x. Quel est le maximum de g ?
3. La fonction $k(x) = x^2 - 2x$ est-elle minorée sur $\mathbb{R}$? majorée ? Justifier.
4. Comparer les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$.
5. Soit $u(x) = \sqrt{x+1}$ et $w(x) = x^2 - 4$. Donner l'ensemble de définition de $u + w$, de $u \times w$ et de $\dfrac{u}{w}$.

Exercice 14 : sens de variation d'une composée

Pour chaque fonction, écrire $h = v \circ u$, puis en déduire son sens de variation.

1. $h_1(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ sur $\mathbb{R}$ (on écrira $x^2 - 2x + 5$ sous forme canonique). Quel est le minimum de h_1 ?
2. $h_2(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 5}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que h_2 est bornée et donner son maximum.
3. $h_3(x) = (1 - 2x)^3$ sur $\mathbb{R}$.
4. $h_4(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ sur $]1\,;+\infty[$.

SenAcad, une solution de BarroTech