Corrigés détaillés

PREMIÈRE S · CHAPITRE 1 · GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Corrigés détaillés des exercices d'application. Tous les résultats ont été vérifiés par calcul exact, et recoupés par un calcul numérique indépendant. L'exercice 12 est réservé aux séries S2-S4, les exercices 13 et 14 aux séries S1-S3.

Leçon 1 : image directe, image réciproque

Exercice 1

1. $D_f = [-4\,;5]$. On lit $f(-4) = -2$, $f(1) = -1$ et $f(4) = 2$.
2. La courbe coupe l'axe des abscisses en -3, 0, 2 et 5 : ce sont les **antécédents de** 0. La droite $y = 2$ touche la courbe aux points $(-2\,;2)$ et $(4\,;2)$: les **antécédents de** 2 sont -2 et 4.
3. On projette chaque partie de la courbe sur l'axe des ordonnées :
   - sur $[-4\,;-2]$, f croît de -2 à 2 : $f\big([-4\,;-2]\big) = [-2\,;2]$;
   - sur $[-2\,;1]$, f décroît de 2 à -1 : $f\big([-2\,;1]\big) = [-1\,;2]$;
   - sur $[-3\,;4]$, f part de $f(-3) = 0$, monte à 2, descend à -1 puis remonte à 2 : $f\big([-3\,;4]\big) = [-1\,;2]$;
   - sur $[-4\,;5]$, la plus petite valeur est -2 et la plus grande 2 : $f\big([-4\,;5]\big) = [-2\,;2]$.
4. On projette sur l'axe des abscisses les points de la courbe dont l'ordonnée est dans l'ensemble :
   - $f^{-1}\big([0\,;2]\big) = [-3\,;0] \cup [2\,;5]$ (parties de la courbe sur l'axe des abscisses ou au-dessus) ;
   - $f^{-1}\big(\{3\}\big) = \varnothing$: la droite $y = 3$ ne coupe pas la courbe, car $f(x) \leq 2$;
   - $f^{-1}\big(]-\infty\,;0[\big) = [-4\,;-3[\cup]0\,;2[$ (parties strictement sous l'axe ; les bornes -3, 0 et 2 sont exclues car f y vaut 0).
5. $f(x) \geq 0 \iff x \in f^{-1}\big([0\,;+\infty[\big)$. Comme $f(x) \leq 2$, c'est $f^{-1}\big([0\,;2]\big)$: $S = [-3\,;0] \cup [2\,;5]$.

SenAcad, une solution de Barrolech

Exercice 2

1. $(x-3)^2-4 = x^2-6x+9-4 = x^2-6x+5 = f(x)$. La courbe est une parabole tournée vers le haut, de sommet $(3\,;-4)$: f est décroissante sur $]-\infty\,;3]$, croissante sur $[3\,;+\infty[$, et son minimum est $f(3) = -4$.
2. Sur $[2\,;6]$: $f(2) = -3$, puis f descend à $f(3) = -4$ et remonte à $f(6) = 5$. Donc $f\big([2\,;6]\big) = [-4\,;5]$. Sur $[4\,;7]$, f est croissante : $f\big([4\,;7]\big) = [f(4)\,;f(7)] = [-3\,;12]$.
3. - $f(x) = 0 \iff (x-3)^2 = 4 \iff x-3 = -2$ ou $x-3 = 2$: $f^{-1}\big(\{0\}\big) = \{1\,;5\}$.
   - $-3 \leq f(x) \leq 0 \iff 1 \leq (x-3)^2 \leq 4 \iff 1 \leq |x-3| \leq 2$: $f^{-1}\big([-3\,;0]\big) = [1\,;2] \cup [4\,;5]$.
   - $f(x) \geq -4$ pour tout x, donc $f^{-1}\big(\,]-\infty\,;-5]\,\big) = \varnothing$, et $f^{-1}\big([-4\,;+\infty[\big) = \mathbb{R}$.
4. $g(x)$ existe si $x+2 \geq 0$: $D_g = [-2\,;+\infty[$. La courbe de g est celle de la racine carrée décalée de 2 vers la gauche (leçon 4) : g est croissante. Donc $g\big([-1\,;7]\big) = [g(-1)\,;g(7)] = [1\,;3]$. Ensuite, $0 \leq \sqrt{x+2} \leq 2 \iff 0 \leq x+2 \leq 4$: $g^{-1}\big([0\,;2]\big) = [-2\,;2]$. De même, $1 \leq \sqrt{x+2} \leq 3 \iff 1 \leq x+2 \leq 9$: $g^{-1}\big([1\,;3]\big) = [-1\,;7]$.

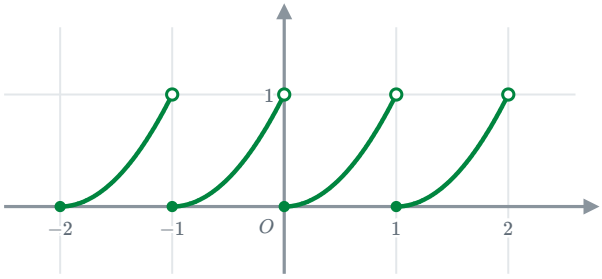
Leçon 2 : parité, périodicité, ensemble d'étude

Exercice 3

1. a. $D = \mathbb{R}$ et $f_1(-x) = 2x^4 - 3x^2 + 1 = f_1(x)$: f_1 est **paire**.
   b. $D = \mathbb{R}$ et $f_2(-x) = -x^5 + 2x^3 - x = -f_2(x)$: f_2 est **impaire**.
   c. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$, symétrique par rapport à 0, et $f_3(-x) = \dfrac{-x}{x^2-1} = -f_3(x)$: f_3 est **impaire**.
   d. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ n'est pas symétrique par rapport à 0 ($-2 \in D$ mais $2 \notin D$) : f_4 n'est **ni paire ni impaire**.
   e. $f_5(1) = -3$ et $f_5(-1) = 5$. Comme $f_5(-1) \neq f_5(1)$ et $f_5(-1) \neq -f_5(1)$, f_5 n'est **ni paire ni impaire**.
   f. $D = \mathbb{R}$ et $f_6(-x) = |-x| + (-x)^2 = |x| + x^2 = f_6(x)$: f_6 est **paire**.
   g. $9 - x^2 \geq 0 \iff x \in [-3\,;3]$, intervalle symétrique par rapport à 0, et $f_7(-x) = \sqrt{9-x^2} = f_7(x)$: f_7 est **paire**.
   h. $D = \mathbb{R}$ et $f_8(-x) = (-x)\,|-x| = -x\,|x| = -f_8(x)$: f_8 est **impaire**.
2. $f(-2) = -f(2) = 3$, et $f(0) = 0$ car f est impaire et définie en 0.
3. $f(-1) = -f(1) = -(1-2) = 1$. Pour $x \leq 0$, on a $-x \geq 0$, donc $f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) = x^2 + 2x$, et $f(x) = -f(-x) = -x^2 - 2x$.

Exercice 4

1. Les trois fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :
   - $f(x+\pi) = \sin(2x+2\pi) = \sin(2x) = f(x)$;
   - $g(x+4\pi) = \cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) = g(x)$;
   - $h(x+2) = \cos(\pi x + 2\pi) = \cos(\pi x) = h(x)$.
2. a. Pour tout réel x, $E(x+1) = E(x)+1$, donc $\varphi(x+1) = \big(x+1-E(x)-1\big)^2 = \varphi(x)$.
   b. Sur $[0\,;1[$, $E(x)=0$, donc $\varphi(x) = x^2$. Puis $\varphi(2{,}5) = (2{,}5-2)^2 = 0{,}25$ et $\varphi(-0{,}5) = \big(-0{,}5-(-1)\big)^2 = 0{,}25$.
   c. Sur chaque intervalle $[k\,;k+1[$ (k entier), $\varphi(x) = (x-k)^2$: c'est l'arc de parabole de $[0\,;1[$ décalé de k. Chaque arc part du point $(k\,;0)$, inclus, et s'arrête avant le point $(k+1\,;1)$, exclu.



Courbe de φ sur [−2 ; 2[: point plein inclus, point creux exclu

3. $\sin(-2x) = -\sin(2x)$: f est impaire, et de période π. Il suffit de l'étudier sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. La symétrie par rapport à O donne la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, intervalle de longueur π ; les translations de vecteurs $\pi\vec{i}$, $-\pi\vec{i}$, $2\pi\vec{i}$… donnent toute la courbe.
4. Si $T>0$ était une période de $f : x \mapsto x^2$, on aurait $f(0+T) = f(0)$, soit $T^2 = 0$, donc $T = 0$. C'est impossible : la fonction carré n'est pas périodique.

Leçon 3 : éléments de symétrie d'une courbe

Exercice 5

1. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$. Si $x \neq 3$, alors $6-x \neq 3$: $6-x \in D_f$. Puis
$$f(6-x) = \frac{7-x}{3-x} = \frac{x-7}{x-3}, \qquad f(6-x)+f(x) = \frac{x-7+x+1}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} = 2 = 2\times 1.$$
Donc $\Omega(3\,;1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
2. Avec $x = X-1$ et $y = Y+1$, l'équation $y = g(x)$ devient
$$Y+1 = (X-1)^3 + 3(X-1)^2 - 1 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 + 3X^2 - 6X + 3 - 1 = X^3 - 3X + 1,$$
soit $Y = X^3 - 3X$. La fonction $X \mapsto X^3 - 3X$ est impaire : $\Omega(-1\,;1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$.
3. $D_h = \mathbb{R}\setminus\{2\}$; si $x \neq 2$, alors $4-x \neq 2$. Puis $h(4-x) = 4-x+\frac{1}{2-x} = 4-x-\frac{1}{x-2}$, donc $h(4-x)+h(x) = 4 = 2\times 2$. Le point $\Omega(2\,;2)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_h$.

Exercice 6

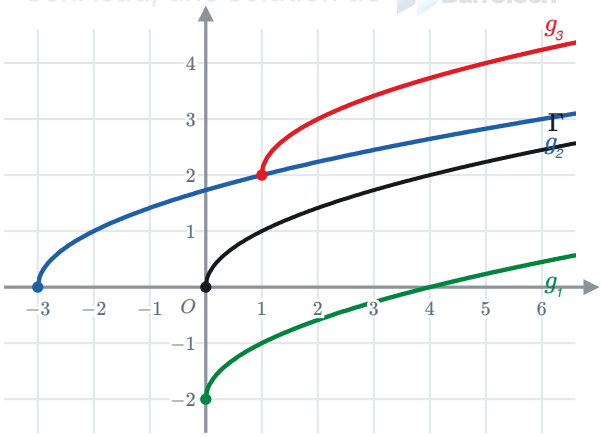
1. $x^2(x-2)^2+1 = x^2(x^2-4x+4)+1 = x^4-4x^3+4x^2+1$. Pour tout réel x, $2-x \in \mathbb{R}$ et $f(2-x) = (2-x)^2(2-x-2)^2+1 = (2-x)^2x^2+1 = f(x)$: la droite $x=1$ est un axe de symétrie.
2. $4x-x^2 = x(4-x) \geq 0 \iff x \in [0\,;4]$, donc $D_g = [0\,;4]$. Si $x \in [0\,;4]$, alors $4-x \in [0\,;4]$, et $g(4-x) = \sqrt{(4-x)\big(4-(4-x)\big)} = \sqrt{(4-x)\,x} = g(x)$. La droite $x=2$ est un axe de symétrie. *(La courbe de g est un demi-cercle de centre $(2\,;0)$ et de rayon 2.)*
3. $D_h = \mathbb{R}$ et $h(4-x) = |3-x|+|1-x| = |x-3|+|x-1| = h(x)$: la droite $x=2$ est un axe de symétrie.
4. Si $x=1$ était un axe, on aurait $k(2-x)=k(x)$ pour tout x. Or $k(0)=0$ et $k(2)=6$: pour $x=0$, l'égalité est fausse. La droite $x=1$ n'est pas un axe de symétrie. *(L'axe de la parabole est la droite $x=-\frac{1}{2}$.)*

Leçon 4 : fonctions associées par translation

Exercice 7

1. a. $D_{g_1} = [0\,;+\infty[$; translation de vecteur $-2\vec{j}$ (on descend de 2).
   b. $g_2(x) = \sqrt{x-(-3)}$: $D_{g_2} = [-3\,;+\infty[$; translation de vecteur $-3\vec{i}$ (on va de 3 vers la gauche).
   c. $D_{g_3} = [1\,;+\infty[$; translation de vecteur $\vec{u}(1\,;2)$: la courbe part du point $(1\,;2)$.

SenAcad, une solution de BarroTech

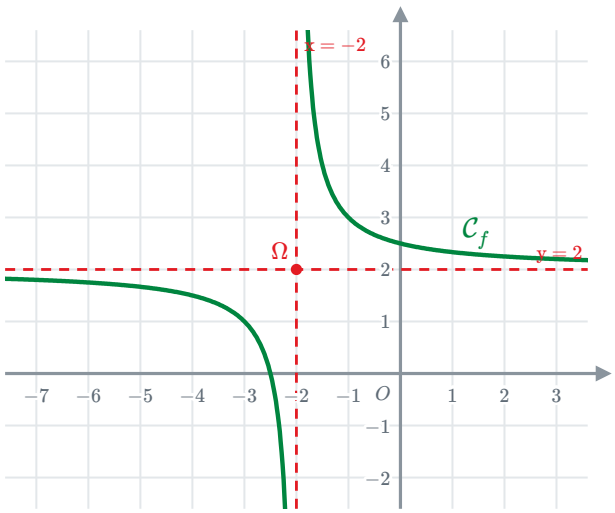


Γ (noir), g_1 (vert), g_2 (bleu), g_3 (rouge)

2. $g(x) = f(x+3)+1$ avec $f(x)=x^2$: $g(x) = (x+3)^2+1 = x^2+6x+10$.
3. a. $f_1(x) = (x+2)^2-4+1 = (x+2)^2-3$: parabole $y=x^2$, vecteur $\vec{u}(-2\,;-3)$, sommet $S(-2\,;-3)$, axe $x=-2$.
   b. $f_2(x) = 2(x^2-6x)+13 = 2\big[(x-3)^2-9\big]+13 = 2(x-3)^2-5$: parabole $y=2x^2$, vecteur $\vec{u}(3\,;-5)$, sommet $S(3\,;-5)$, axe $x=3$.
   c. $f_3(x) = -(x^2-2x)+3 = -\big[(x-1)^2-1\big]+3 = -(x-1)^2+4$: parabole $y=-x^2$, vecteur $\vec{u}(1\,;4)$, sommet $S(1\,;4)$, axe $x=1$.

Exercice 8

1. Pour $x \neq -2$: $2 + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{2(x+2)+1}{x+2} = \dfrac{2x+5}{x+2} = f(x)$. Donc $f(x) = g(x+2) + 2$ avec $g(x) = \dfrac{1}{x}$: $\mathcal{C}_f$ est l'image de l'hyperbole $y = \dfrac{1}{x}$ par la translation de vecteur $\vec{u}(-2\,;2)$. Centre de symétrie $\Omega(-2\,;2)$; asymptotes $x = -2$ et $y = 2$.



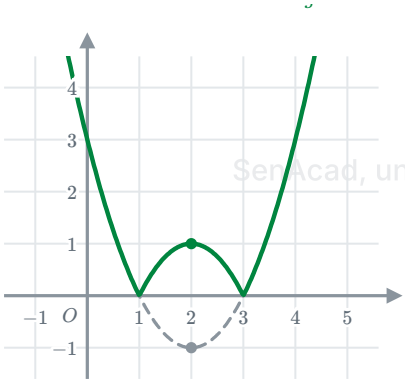
2. $g(x) = \dfrac{3(x-1)+2}{x-1} = 3 + \dfrac{2}{x-1}$: image de l'hyperbole $y = \dfrac{2}{x}$ par la translation de vecteur $\vec{u}(1\,;3)$. Centre $\Omega(1\,;3)$; asymptotes $x = 1$ et $y = 3$.
3. $h(x) = \dfrac{-2(x-1)-1}{x-1} = -2 - \dfrac{1}{x-1}$: image de l'hyperbole $y = -\dfrac{1}{x}$ par la translation de vecteur $\vec{u}(1\,;-2)$. Centre $\Omega(1\,;-2)$; asymptotes $x = 1$ et $y = -2$.
4. $f(3) = -1 + k = 1$, donc $k = 2$. Alors $f(x) = -1 + \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{-(x-2)+2}{x-2} = \dfrac{-x+4}{x-2}$.

Leçon 5 : les fonctions $|f|$ et $x \mapsto f(|x|)$

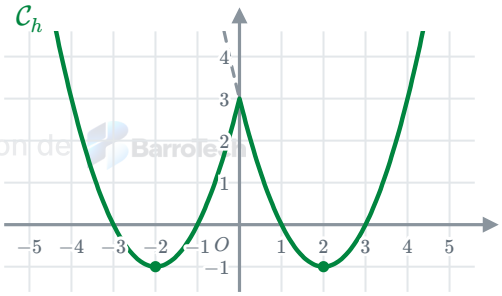
Exercice 9

1. $f(x) = (x-2)^2 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1$. Puis $f(x) = 0 \iff (x-2)^2 = 1 \iff x = 1$ ou $x = 3$. La courbe est une parabole de sommet $(2\,;-1)$, tournée vers le haut, qui coupe l'axe des abscisses en 1 et en 3.
2. $f(x) \geq 0$ sur $]-\infty\,;1]$ et sur $[3\,;+\infty[$, et $f(x) \leq 0$ sur $[1\,;3]$. Donc
   - $g(x) = x^2 - 4x + 3$ sur $]-\infty\,;1]$ et sur $[3\,;+\infty[$;
   - $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ sur $[1\,;3]$.

   On retourne vers le haut l'arc situé entre 1 et 3 : le sommet $(2\,;-1)$ devient $(2\,;1)$. La fonction g est décroissante sur $]-\infty\,;1]$, croissante sur $[1\,;2]$, décroissante sur $[2\,;3]$ et croissante sur $[3\,;+\infty[$.
3. Comme $|x|^2 = x^2$, $h(x) = |x|^2 - 4|x| + 3 = x^2 - 4|x| + 3$. Et $h(-x) = x^2 - 4|-x| + 3 = h(x)$: h est paire. Pour $x \geq 0$, $h(x) = f(x)$: on garde la partie de $\mathcal{C}_f$ à droite de l'axe des ordonnées, puis on la recopie par symétrie par rapport à cet axe. Le minimum de h est -1, atteint en -2 et en 2.



Courbe de g = |f| (en pointillés : $\mathcal{C}$f)



Courbe de h : x ↦ f(|x|)

4. $g(-1) = |1 + 4 + 3| = 8$; $h(-1) = f(1) = 0$; $g(2) = |-1| = 1$; $h(2) = f(2) = -1$.

Exercice 10

1. On coupe la courbe de g par la droite $y = m$:

Valeur de m	$m < 0$	$m = 0$	$0 < m < 1$	$m = 1$	$m > 1$
Nombre de solutions	0	2	4	3	2

2. On coupe la courbe de h par la droite $y = m$ (minimum -1 en ± 2, valeur 3 en 0) :

Valeur de m	$m < -1$	$m = -1$	$-1 < m < 3$	$m = 3$	$m > 3$
Nombre de solutions	0	2	4	3	2

3. $|f(x)| = 1 \iff f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$. D'une part, $(x-2)^2 - 1 = 1 \iff (x-2)^2 = 2 \iff x = 2 - \sqrt{2}$ ou $x = 2 + \sqrt{2}$. D'autre part, $(x-2)^2 - 1 = -1 \iff x = 2$. Trois solutions : $2 - \sqrt{2}$, 2 et $2 + \sqrt{2}$, comme prévu pour $m = 1$.
4. $x^2 - 4|x| + 3 = 3 \iff |x|^2 - 4|x| = 0 \iff |x|\big(|x| - 4\big) = 0 \iff |x| = 0$ ou $|x| = 4$. Trois solutions : -4, 0 et 4, comme prévu pour $m = 3$.

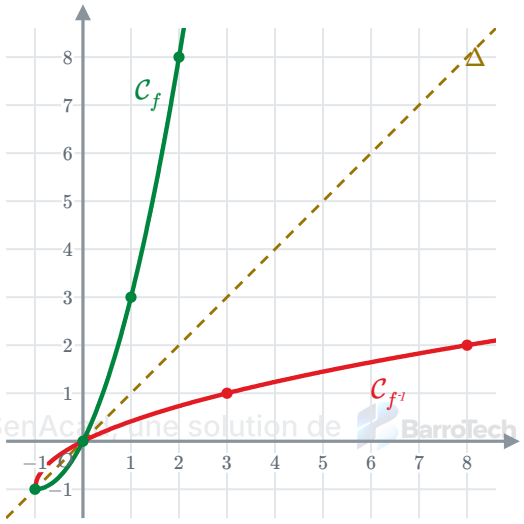
Leçon 6 : fonctions composées

Exercice 11

1. $(v \circ u)(x) = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ et $(u \circ v)(x) = 2x^2 - 1$. Alors $(v \circ u)(0) = 1$ et $(u \circ v)(0) = -1$: les fonctions $v \circ u$ et $u \circ v$ sont différentes.
2. $(w \circ v)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 2}$: il faut $x \geq 0$ et $\sqrt{x} \neq 2$, soit $x \neq 4$. Donc $D_{w \circ v} = [0\,;4[\cup]4\,;+\infty[$.
   $(v \circ w)(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-2}}$: il faut $x \neq 2$ et $\dfrac{1}{x-2} \geq 0$, soit $x > 2$. Donc $D_{v \circ w} =]2\,;+\infty[$.
3. $x^2 - 9 \geq 0 \iff x^2 \geq 9 \iff |x| \geq 3$: l'ensemble de définition est $]-\infty\,;-3] \cup [3\,;+\infty[$.
4. a. $u(x) = 3x + 6$, $v(t) = \sqrt{t}$; b. $u(x) = x^2 + 1$, $v(t) = t^3$; c. $u(x) = x^2 - x$, $v(t) = \dfrac{1}{t}$; d. $u(x) = 2x - 5$, $v(t) = |t|$; e. $u(x) = x^2$, $v(t) = \cos t$.
5. $g(x) = f(x-3) = (f \circ \tau)(x)$ avec $\tau(x) = x - 3$. La courbe de g est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $3\,\vec{i}$.

S2-S4 Exercice 12

1. $(x+1)^2-1=x^2+2x+1-1=f(x)$. La courbe de f est une parabole tournée vers le haut, de sommet $(-1\,;-1)$: sur $I=[-1\,;+\infty[$, elle monte sans s'arrêter, et sans lever le crayon. Donc f est strictement croissante sur I, et $f(I)=[f(-1)\,;+\infty[=[-1\,;+\infty[$. La fonction f est une bijection de I sur $J=[-1\,;+\infty[$.
2. $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=3$ et $f(2)=8$. Les points $(-1\,;-1)$, $(0\,;0)$, $(1\,;3)$ et $(2\,;8)$ sont sur $\mathcal{C}_f$, donc les points $(-1\,;-1)$, $(0\,;0)$, $(3\,;1)$ et $(8\,;2)$ sont sur la courbe de f^{-1}. Les points $(-1\,;-1)$ et $(0\,;0)$ sont sur Δ : ils appartiennent aux deux courbes.
3. La courbe de f^{-1} est la symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.



SenAc une solution de BarroTech

4. Pour $x\geq -1$, le réel $a=-1+\sqrt{x+1}$ est dans I (car $\sqrt{x+1}\geq 0$), et $f(a)=(a+1)^2-1=(x+1)-1=x$. Donc a est l'antécédent de x dans I : $f^{-1}(x)=-1+\sqrt{x+1}$.
5. Pour tout $y>0$, l'équation $\dfrac{4}{x}=y$ a une unique solution dans $]0\,;+\infty[$: $x=\dfrac{4}{y}$. Donc g est une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $]0\,;+\infty[$, et $g^{-1}(y)=\dfrac{4}{y}=g(y)$: g est sa propre réciproque. Sa courbe est donc symétrique par rapport à la droite $y=x$.

S1-S3 Exercice 13

1. Pour tout réel x :
$$1 - f(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2 + 1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) + 1 = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0.$$
Donc $-1 \leq f(x) \leq 1$. Les bornes sont atteintes : $f(1) = 1$ et $f(-1) = -1$.
2. $1 + \dfrac{2}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1+2}{x^2+1} = g(x)$. Comme $x^2 + 1 \geq 1$, on a $0 < \dfrac{2}{x^2+1} \leq 2$, donc $1 < g(x) \leq 3$. Le maximum de g est $g(0) = 3$; le minorant 1 n'est pas atteint.
3. $k(x) = (x-1)^2 - 1 \geq -1$: k est minorée par -1, qui est son minimum ($k(1) = -1$). Elle n'est pas majorée : pour tout réel $M > 0$, $k(M+2) = (M+1)^2 - 1 = M^2 + 2M > M$.
4. $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$.

x	$]-\infty\,;-1[$	$]-1\,;0[$	$]0\,;1[$	$]1\,;+\infty[$
Signe de $x^3 - x$	$-$	$+$	$-$	$+$

Donc $x^3 \leq x$ sur $]-\infty\,;-1] \cup [0\,;1]$, et $x^3 \geq x$ sur $[-1\,;0] \cup [1\,;+\infty[$ (égalité en -1, 0 et 1). 5. $D_u = [-1\,;+\infty[$ et $D_w = \mathbb{R}$. Les fonctions $u + w$ et $u \times w$ sont définies sur $D_u \cap D_w = [-1\,;+\infty[$. Pour $\dfrac{u}{w}$, on retire les zéros de w, -2 et 2 ; seul 2 est dans D_u : $D_{u/w} = [-1\,;2[\cup]2\,;+\infty[$.

S1-S3 Exercice 14

SenAcad, une solution de BarroTech

1. $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$. On pose $u(x) = (x-1)^2 + 4$ et $v(t) = \sqrt{t}$. La fonction u est décroissante sur $]-\infty\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$, à valeurs dans $[4\,;+\infty[$, où v est croissante. Donc h_1 est décroissante sur $]-\infty\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$. Son minimum est $h_1(1) = \sqrt{4} = 2$.
2. $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 \geq 1$. Avec $u(x) = (x+2)^2 + 1$ et $v(t) = \dfrac{1}{t}$, décroissante sur $[1\,;+\infty[$: u décroît sur $]-\infty\,;-2]$ (même sens que v), donc h_2 y est **croissante** ; u croît sur $[-2\,;+\infty[$ (sens contraire), donc h_2 y est **décroissante**. Comme $(x+2)^2 + 1 \geq 1$, on a $0 < h_2(x) \leq 1$: h_2 est bornée, de maximum $h_2(-2) = 1$.
3. $u(x) = 1 - 2x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $v(t) = t^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$: h_3 est décroissante sur $\mathbb{R}$.
4. $u(x) = x - 1$ est croissante sur $]1\,;+\infty[$, à valeurs dans $]0\,;+\infty[$. La fonction $v(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ (composée de la racine carrée, croissante à valeurs strictement positives, et de la fonction inverse, décroissante sur $]0\,;+\infty[$). Sens contraires : h_4 est décroissante sur $]1\,;+\infty[$.